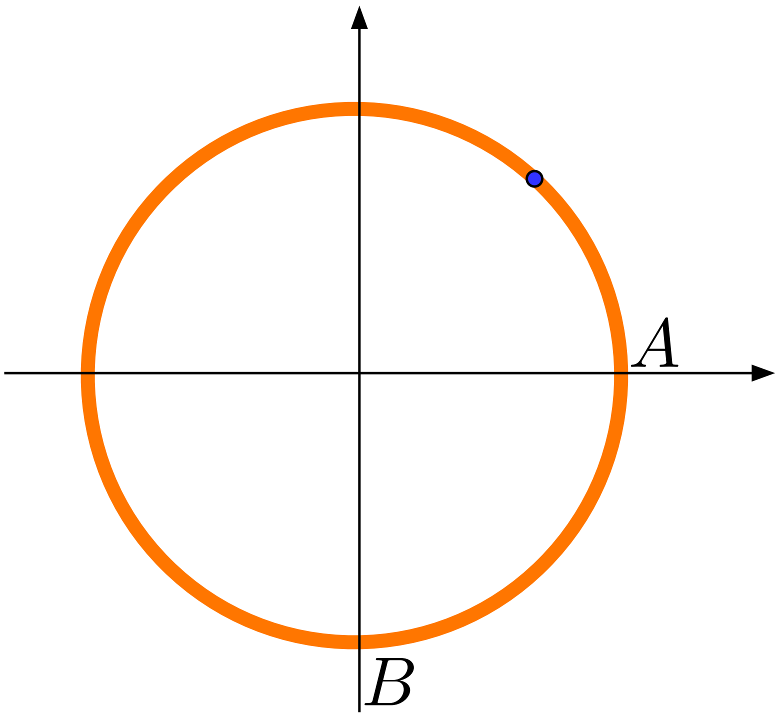
Esercizio (tratto dal Problema 2.8 del Mazzoldi 2)

Una particella si muove lungo una circonferenza di raggio $R = 50\,\mathrm{cm}$. Inizialmente parte dalla posizione A ($\theta = 0$) con velocità angolare nulla e si muove di moto circolare uniformemente accelerato con accelerazione angolare costante $\alpha = 2\,\mathrm{s}^{-2}$, fino a raggiungere il punto B ($\theta = 3\pi/2$). In seguito, la particella decelera (con decelerazione angolare costante), fino a fermarsi in A. Calcolare:

1. il tempo impiegato per andare da A a B;
2. l'accelerazione radiale in B;
3. le componenti cartesiane della velocità all'istante $t = 1\,\mathrm{s}$;
4. l'accelerazione tangenziale nel tratto B $\rightarrow$ A.



SOLUZIONE

DATI NOTI
Anzitutto convertiamo tutti i dati in unità del Sistema Internazionale, e gli angoli espressi in forma numerica.

$$\boxed{\begin{array}{lcl} R &=& 0.5\,\mathrm{m} \\ \alpha &=& 2\,\mathrm{s}^{-2} \\ \theta_A &=& 0 \\ \omega_A &=& 0 \\ \theta_B &=& \frac{3}{2}\pi \end{array}}$$

Scegliamo come istante $t=0$ iniziale quello in cui la particella parte dal punto A.

1. Denotiamo con t_B l'istante in cui la particella raggiunge il punto B.

   - Ricaviamo anzitutto la legge oraria nel tratto $A \to B$, ossia per gli istanti $0 \le t \le t_B$. Dal testo sappiamo che
     - nel tratto $A \to B$ il moto è circolare uniformemente accelerato con acc. angolare α;
     - l'angolo iniziale vale $\theta_A = 0$;
     - la velocità angolare iniziale in A vale $\omega_A = 0$;
     - l'accelerazione angolare vale $\alpha = 2\,\mathrm{s}^{-2}$;

     Da queste indicazioni deduciamo che la legge oraria dev'essere

     $$\theta(t) = \underbrace{\theta_A}_{=0} + \underbrace{\omega_A\,t}_{=0} + \frac{1}{2}\alpha\,t^2 \;=\; \frac{1}{2}\alpha\,t^2 \qquad 0 \le t \le t_B \tag{1}$$

     La corrispondente legge oraria della velocità angolare è

     $$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \alpha\,t \qquad\qquad 0 \le t \le t_B \tag{2}$$

     mentre quella dell'accelerazione angolare è ovviamente

     $$\alpha(t) = \alpha = \text{cost } > 0 \tag{3}$$

   - Dato che t_B è l'istante in cui il punto arriva in B, ossia in corrispondenza dell'angolo $\theta_B = 3\pi/2$, allora per la legge oraria avremo

     $$\frac{3\pi}{2} = \theta(t = t_B) = \frac{1}{2}\alpha\,t_B^2 \tag{4}$$

     e pertanto

     $$t_B = \sqrt{\frac{3\pi}{\alpha}} \tag{5}$$

     Sostituendo i valori

     $$t_B \;=\; \sqrt{\frac{3\pi}{\frac{2}{\mathrm{s}^2}}} = \sqrt{\frac{3\pi}{2}}\,\mathrm{s} = 2.17\,\mathrm{s} \tag{6}$$

- Osserviamo inoltre che la velocità angolare in tale istante vale

$$\begin{aligned}\omega_B &= \omega(t_B) = \alpha\, t_B = \\ &\quad \text{[uso la (5)]} \\ &= \alpha \sqrt{\frac{3\pi}{\alpha}} \end{aligned} \tag{7}$$

e dunque

$$\omega_B = \sqrt{3\pi\alpha} \tag{8}$$

2. La formula generale per l'accelerazione in un moto circolare è

$$\vec{a} = \underbrace{-R\omega^2(t)}_{\substack{a_r\,=\,\text{accel. radiale} \\ \text{(centripeta)}}} \vec{u}_r + \underbrace{R\,\alpha(t)}_{a_\theta\,=\,\text{accel. tangenziale}} \vec{u}_\theta \tag{9}$$

Valutando l'accelerazione radiale all'istante $t = t_B$ in cui giunge in B, si ha

$$\begin{aligned} a_r(t_B) &= -R\,\omega^2(t_B) = -R\,\omega_B^2 = \\ &\quad \text{[uso la (8)]} \\ &= -R\,3\pi\alpha \end{aligned} \tag{10}$$

Sostituendo i valori abbiamo

$$\begin{aligned} a_r(t_B) &= -\,0.50\,\mathrm{m} \cdot 3\pi\,\frac{2}{\mathrm{s}^2} = \\ &= -3\pi\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \\ &= -9.42\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned} \tag{11}$$

NOTA BENE: controllo dimensionale: l'accelerazione radiale a_r è una componente del vettore accelerazione $\vec{a}$ e dunque ha un'unità di $\mathrm{m/s}^2$, diversamente dall'accelerazione angolare che ha dimensione di s^{-2}.

3. Per calcolare le componenti cartesiane della velocità all'istante $t = 1\,\mathrm{s}$, osserviamo che la velocità in un moto circolare è data da

$$\vec{v}(t) = R\omega(t)\,\hat{u}_\theta(t) \tag{12}$$

dove il versore trasverso $\hat{u}_\theta$, scomposto in componenti cartesiane,

$$\hat{u}_\theta(t) = -\sin\theta(t)\,\hat{u}_x + \cos\theta(t)\,\hat{u}_y \tag{13}$$

Pertanto

$$\vec{v}(t) = -R\omega(t)\sin\theta(t)\,\hat{u}_x + R\omega(t)\cos\theta(t)\,\hat{u}_y \tag{14}$$

- Valutando la legge oraria angolare (1) all'istante $t = 1\,\mathrm{s}$ otteniamo

$$\theta_1 = \theta(t = 1\,\mathrm{s}) = \frac{1}{2}\frac{2}{\cancel{\mathrm{s}^2}} \cdot 1\,\cancel{\mathrm{s}^2} = 1 \tag{15}$$

e valutando la legge oraria (2) della velocità angolare

$$\omega_1 = \omega(t = 1\,\mathrm{s}) = \frac{2}{\cancel{\mathrm{s}^2}} \cdot 1\,\cancel{\mathrm{s}} = 2\mathrm{s}^{-1} \tag{16}$$

- Sostituendo in (19) si ha

$$\begin{aligned} v_x(t = 1\,\mathrm{s}) &= -R\omega_1 \sin\theta_1 = \\ &= -0.50\,\mathrm{m} \cdot \frac{2}{\mathrm{s}} \cdot \sin(1) = -0.84\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{17}$$

e

$$\begin{aligned} v_y(t = 1\,\mathrm{s}) &= R\omega_1 \cos\theta_1 = \\ &= 0.50\,\mathrm{m} \cdot \frac{2}{\mathrm{s}} \cdot \cos(1) = 0.54\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{18}$$

Pertanto il vettore velocità a $t = 1\,\mathrm{s}$, in componenti cartesiane, vale

$$\vec{v}(t = 1\,\mathrm{s}) = \left(-0.84\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,,\, 0.54\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) \tag{19}$$

4. Consideriamo ora il tratto di moto $B \to A$. Denotiamo con t_f l'istante finale in cui la particella torna al punto A dopo aver compiuto un giro. Di nuovo, dalla formula generale

$$\vec{a} = \underbrace{-R\omega^2(t)}_{\substack{a_r\,=\,\text{accel. radiale}\\ \text{(centripeta)}}} \vec{u}_r + \underbrace{R\,\alpha(t)}_{a_\theta\,=\,\text{accel. tangenziale}} \vec{u}_\theta \tag{20}$$

vediamo che l'accelerazione tangenziale

$$a_\theta(t) = R\,\alpha(t) \qquad\qquad \text{(per qualsiasi moto circolare)} \tag{21}$$

è sostanzialmente data (a parte il raggio R) dall'accelerazione angolare $\alpha(t)$. Quindi occorre trovare l'accelerazione angolare nel tratto $B \to A$. Sappiamo dal testo che si tratta di un moto circolare uniformemente decelerato. Denotiamo con α' tale accelerazione (che sarà dunque negativa $\alpha' < 0$).

$$\alpha(t) = -\alpha' \qquad\qquad t_B \le t \le t_f \tag{22}$$

Per determinarne il valore possiamo procedere in due modi:

Primo modo:

- Troviamo anzitutto la legge oraria della particella nel tratto $B \to A$. Sappiamo che:
  - è un moto circolare uniformemente decelerato con accelerazione $-\alpha'$,
  - all'istante t_B la particella si trova in B, ossia alla 'posizione' $\theta = \theta_B = 3\pi/2$;
  - all'istante t_B (in cui si trova in B) la particella ha velocità angolare $\omega_B = \sqrt{3\,\pi\,\alpha}$

  Da queste indicazioni possiamo dedurre che la legge oraria

$$\theta(t) = \theta_B + \omega_B(t - t_B) - \frac{1}{2}\alpha'\,(t - t_B)^2 \qquad t_B \le t \le t_f \tag{23}$$

  e anche quella per la velocità

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_B - \alpha'\,(t - t_B) \qquad t_B \le t \le t_f \tag{24}$$

- Sappiamo dunque che all'istante t_f la particella avrà compiuto un intero giro, ossia la sua posizione vale $\theta = 2\pi$. Pertanto dalla legge oraria (23)

$$\begin{aligned} \theta(t_f) &= 2\pi \\ &\Downarrow \\ \frac{3\pi}{2} + \omega_B(t_f - t_B) - \frac{1}{2}\alpha'\,(t_f - t_B)^2 &= 2\pi \end{aligned} \tag{25}$$

- Sappiamo anche che in tale istante t_f la particella si ferma. Pertanto vale che

$$\omega(t_f) = 0 \qquad \Rightarrow \omega_B - \alpha'\,(t_f - t_B) = 0 \tag{26}$$

da cui ricaviamo che

$$t_f - t_B = \frac{\omega_B}{\alpha'} \tag{27}$$

Sostituendo ora l'Eq.(27) in (25) otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{3\pi}{2} + \omega_B\,\frac{\omega_B}{\alpha'} - \frac{1}{2}\alpha'\left(\frac{\omega_B}{\alpha'}\right)^2 &= 2\pi \\ &\Downarrow \\ \frac{\omega_B^2}{\alpha'} - \frac{1}{2}\frac{\omega_B^2}{\alpha'} &= \frac{\pi}{2} \\ &\Downarrow \\ \frac{1}{2}\frac{\omega_B^2}{\alpha'} &= \frac{\pi}{2} \\ &\Downarrow \\ \alpha' &= \frac{\omega_B^2}{\pi} \end{aligned} \tag{28}$$

Usando la (8) ricaviamo

$$\alpha' = \frac{3\pi\,\alpha}{\pi} = 3\alpha$$

Sostituendo i valori

$$\alpha' = 3 \cdot \frac{2}{\mathrm{s}^2} = 6\,\mathrm{s}^{-2}$$

Secondo modo:

- Utilizziamo la formula generale (che vale per tutti i moti circolari uniformemente accelerati)

$$\Delta\theta = \frac{\omega_{fin}^2 - \omega_{in}^2}{2\alpha} \tag{29}$$

dove ω_{in} è la velocità angolare ad un istante iniziale (arbitrario), ω_{fin} è la velocità angolare ad un istante finale (arbitrario), $\Delta\theta = \theta_{fin} - \theta_{in}$ è l'angolo spazzato dalla particella tra l'istante iniziale e quello finale, e α l'accelerazione angolare (costante) che caratterizza il moto uniformemente accelerato.

NB: Questa formula è, per il moto circolare uniformemente accelerato, l'esatto analogo della formula

$$\Delta x = \frac{v_{fin}^2 - v_{in}^2}{2a} \tag{30}$$

per il moto rettilineo uniformemente accelerato. Semplicemente lo 'spazio' è sostituito dagli angoli, le velocità sono sostituite da velocità angolari e l'accelerazione dall'accelerazione angolare. Si dimostra allo stesso modo.

- Applichiamo la formula generale (29) al nostro caso particolare, scegliendo :
  - come istante iniziale l'istante t_B in cui la particella si trova in B ($\theta_B = 3\pi/2$) e in cui la velocità angolare vale ω_B;
  - come istante finale l'istante t_f in cui la particella torna in A ($\theta = 2\pi$) e in cui la velocità angolare è nulla;
  - l'accelerazione angolare vale $-\alpha'$

  Quindi abbiamo

$$\begin{aligned} \Delta\theta = \frac{\pi}{2} &= \frac{(0\,\mathrm{s}^{-1})^2 - \omega_B^2}{-2\alpha'} \\ &\Downarrow \\ \frac{\pi}{2} &= \frac{\omega_B^2}{2\alpha'} \end{aligned} \tag{31}$$

  da cui

$$\begin{aligned} \alpha' &= \frac{\omega_B^2}{\pi} = \\ &= [\text{uso ora } (8)] \\ &= \frac{2\alpha\,\theta_B}{\pi} = \\ &= \frac{2\alpha\,\frac{3\pi}{2}}{\pi} = \\ &= 3\,\alpha \end{aligned} \tag{32}$$

  Sostituendo i valori

$$\alpha' = 3\alpha = 3\,\cdot 2\,\mathrm{s}^{-2} = 6\,\mathrm{s}^{-2} \tag{33}$$

Avendo ora trovato l'accelerazione angolare α', possiamo ora determinare l'accelerazione tangenziale dalla (21)

$$a_\theta = R\,\alpha(t) = -R\alpha' = -0.5\,\mathrm{m}\cdot(6\,\mathrm{s}^{-2}) = -3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{34}$$

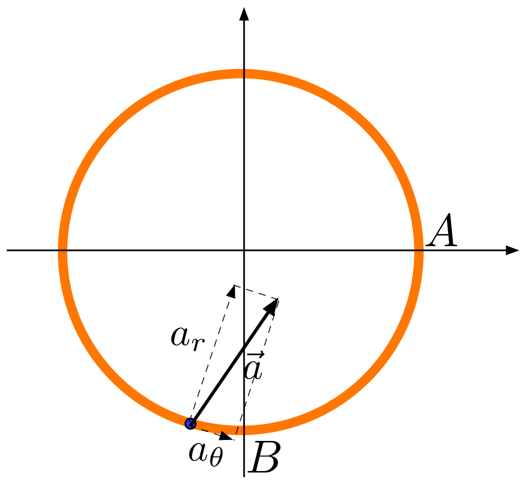


Figure 1: Il vettore accelerazione negli istanti precedenti e successivi a t_B (istante in cui la particella giunge in B). Si noti che la componente tangenziale a_θ dell'accelerazione cambia segno in maniera discontinua a $t = t_B$, in quanto il moto circolare passa da circolare uniformemente accelerato [vedi Eq.(3)] a circolare uniformemente decelerato [vedi Eq.(22)].