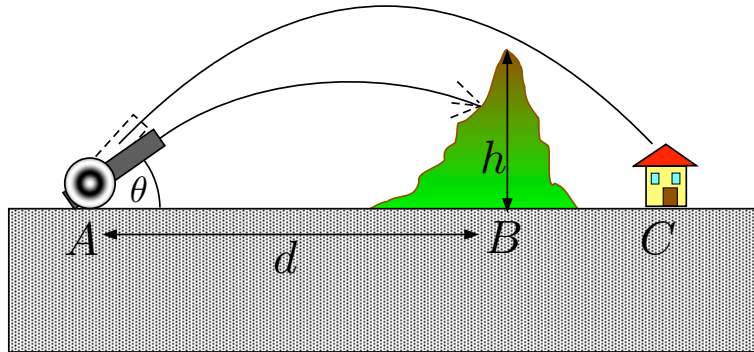


Esercizio

Con un cannone situato in A si tenta di colpire la costruzione posta in C , situata dietro una collina che raggiunge un'altezza massima $h = 500$ m in corrispondenza del punto B alla base. La distanza tra A e B è $d = 5$ km, il modulo della velocità di lancio del proiettile è $v_0 = \sqrt{10gd/9}$, mentre l'angolo θ d'inclinazione del cannone può essere variato a piacere. Si calcoli il valore massimo d^* che la distanza BC può assumere affinché la costruzione C non possa essere colpita dal proiettile (si trascuri la resistenza dell'aria).



SOLUZIONE

DATI NOTI

$$v_0 = |\vec{v}_0| = \sqrt{10 g d/9}$$

$$d = 5000 \text{ m}$$

$$h = 500 \text{ m}$$

- Consideriamo una traiettoria che parte dal cannone A , in cui poniamo per comodità l'origine. L'equazione della traiettoria $A \rightarrow C$ si ottiene facilmente dalle leggi orarie del moto

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos \theta t & (\text{moto rettilineo uniforme lungo } x) \\ y(t) = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 & (\text{moto uniformemente accelerato lungo } y) \end{cases} \quad (1)$$

Dalla prima equazione (1) ricaviamo $t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$ e, sostituendo nella seconda equazione, otteniamo l'equazione parabolica della traiettoria in termini dell'angolo θ e della velocità iniziale di lancio v_0 .

$$y(x) = x \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 \quad (2)$$

- Imponiamo ora le due condizioni

1. La traiettoria caratterizzata dalla distanza massima d^* deve sfiorare la sommità della collina

$$\begin{aligned} y(x=d) &= h \\ \Downarrow \\ d \tan \theta - \frac{g d^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} &= h \\ [\text{moltiplico per } 2v_0^2 \cos^2 \theta] \\ \Downarrow \\ g d^2 - 2d v_0^2 \cos \theta \sin \theta + 2h v_0^2 \cos^2 \theta &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

2. Gittata totale. Utilizzando la formula per la gittata abbiamo

$$\begin{aligned} d + d^* &= \frac{2v_0^2 \cos \theta \sin \theta}{g} \\ \Downarrow \\ g(d + d^*) &= 2v_0^2 \cos \theta \sin \theta \end{aligned} \quad (4)$$

Sostituendo la (4) nella (3), e mantenendo la (4) otteniamo

$$\begin{cases} g d^* d = 2h v_0^2 \cos^2 \theta \\ g(d + d^*) = 2v_0^2 \cos \theta \sin \theta \end{cases} \quad (5)$$

Utilizzando ora il dato $v_0 = \sqrt{10 g d/9}$, e dividendo entrambe le equazioni per g , otteniamo

$$\begin{cases} d^* = \frac{20}{9} h \cos^2 \theta \\ d + d^* = \frac{20}{9} d \cos \theta \sin \theta \end{cases} \quad (6)$$

che è un sistema di due equazioni nelle due incognite θ e d^* , in termini dei dati noti d e h .

- Risolviamo il sistema di equazioni. Per determinare d^* , dobbiamo eliminare θ . A tale scopo, ricaviamo $\cos^2 \theta$ dalla prima ed eleviamo al quadrato la seconda equazione (6), utilizzando $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$

$$\begin{cases} \cos^2 \theta = \frac{9}{20} \frac{d^*}{h} \\ (d^* + d)^2 = \frac{20^2}{9^2} d^2 \cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta) \end{cases} \quad (7)$$

Sostituendo ora la prima equazione di (7) nella seconda, otteniamo un'equazione per d^*

$$\begin{aligned} (d^* + d)^2 &= \frac{20^2}{9^2} d^2 \frac{9}{20} \frac{d^*}{h} \left(1 - \frac{9}{20} \frac{d^*}{h}\right) \\ (d^* + d)^2 &= \frac{20^2}{9^2} d^2 9d^* \frac{20h - 9d^*}{20^2 h^2} \\ d^{*2} + d^2 + 2d^* d &= \frac{d^2 d^*}{9h^2} (20h - 9d^*) \end{aligned}$$

ossia

$$\left(1 + \frac{d^2}{h^2}\right) d^{*2} - 2d^* d \left(\frac{10d}{h} - 1\right) + d^2 = 0 \quad (8)$$

le cui soluzioni sono

$$d_{1,2}^* = \frac{d \left(\frac{10d}{9h} - 1\right) \pm \sqrt{d^2 \left(\frac{10d}{9h} - 1\right)^2 - d^2 \left(1 + \frac{d^2}{h^2}\right)}}{1 + \frac{d^2}{h^2}} \quad (9)$$

Raccogliendo d

$$d_{1,2}^* = d \frac{\left(\frac{10}{9} \frac{d}{h} - 1\right) \pm \sqrt{\left(\frac{10}{9} \frac{d}{h} - 1\right)^2 - \left(1 + \frac{d^2}{h^2}\right)}}{1 + \frac{d^2}{h^2}} \quad (10)$$

e sfruttando il fatto che dai dati noti $d/h = 10$, otteniamo

$$\begin{cases} d_1^* = 556 \text{ m} \\ d_2^* = 446 \text{ m} \end{cases} \quad (11)$$

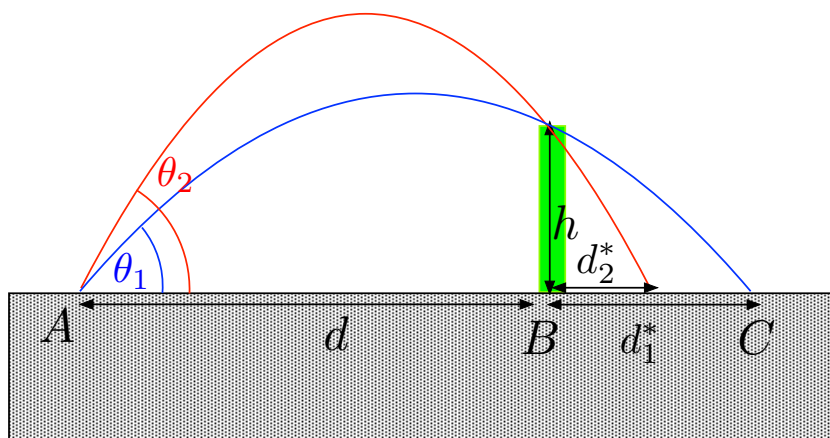


Figure 1: Le due soluzioni corrispondono alle due possibili traiettorie che passano per la sommità della collina.

I due angoli possibili di lancio sono dati dalla formula [vedi la prima delle Eq.(7)]

$$\theta = \arccos \sqrt{\frac{9}{20} \frac{d^*}{h}} \quad (12)$$

e valgono rispettivamente

$$\begin{cases} \theta_1 = \pi/4 \simeq 0.785 \\ \theta_2 = 0.886 \end{cases} \quad (13)$$

Le due soluzioni corrispondono alle due possibili traiettorie che passano per la sommità della collina a valore fissato del modulo v_0 della velocità di lancio, come mostrato in Fig.1. La distanza di sicurezza che cerchiamo è la più piccola tra le soluzioni (11), ossia $d_2^* = 446$ m. Se dunque la costruzione è situata ad una distanza $d = BC$ inferiore a d_2^* , non può essere colpita dal cannone.