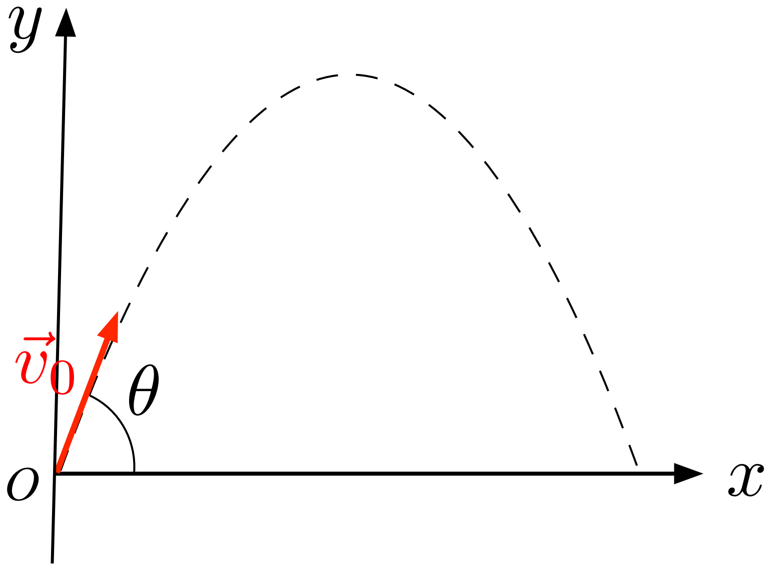
Esercizio

Una particella di massa m viene lanciata da un punto O del suolo con una velocità di modulo pari a $v_0 = 4\,\mathrm{m/s}$ e con un angolo iniziale $\theta = \pi/3$ rispetto all'asse orizzontale x. Indicando con y l'asse verticale

1. determinare la legge oraria della posizione $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ e della velocità $\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))$;
2. calcolare l'andamento nel tempo della quantità $E_P = mgz$ (detta energia potenziale), disegnarne il grafico, determinando l'istante in cui raggiunge il valore massimo;
3. calcolare andamento nel tempo della quantità $E_K = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2)$ (detta energia cinetica), disegnarne il grafico, stabilendo qual è il suo valore minimo;
4. mostrare che la somma $E_P + E_K$ dell'energia cinetica e potenziale si mantiene costante nel tempo



SOLUZIONE

DATI NOTI
$v_0 = 4\,\mathrm{m/s}$
$\theta = \pi/4$

Anzitutto osserviamo che

- **Posizione iniziale:** Scegliendo O come origine spaziale ed l'istante di lancio da O come origine temporale, abbiamo

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(0) & = & 0 \\ \\ y(0) & = & 0 \end{array} \right. \tag{1}$$

- **Velocità iniziale:** Dai dati noti v_0 e θ ricaviamo subito le componenti della velocità iniziale

$$\left\{ \begin{array}{rcl} v_x(0) & = & v_0 \cos\theta \\ \\ v_x(0) & = & v_0 \sin\theta \end{array} \right. \tag{2}$$

Possiamo ora procedere a determinare i vari punti richiesti:

1. **Legge oraria**
   Dato che l'accelerazione è l'accelerazione di gravità

$$\vec{g} = 0\,\hat{u}_x - g\,\hat{u}_y \tag{3}$$

   abbiamo che

   - **Moto lungo x:**
     Dato che la componente x dell'accelerazione di gravità è nulla, il moto lungo x è rettilineo uniforme, con posizione iniziale data dalla prima Eq.(1) e con velocità iniziale data dalla prima (2). Pertanto abbiamo

$$x(t) = v_0 \cos\theta\, t \tag{4}$$
$$v_x(t) = v_0 \cos\theta = \mathrm{cost} \tag{5}$$

   - **Moto lungo y:**
     Dall'Eq.(3) osserviamo che il moto lungo y è rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione $-g$, con posizione iniziale data dalla seconda Eq.(1) e con velocità iniziale data dalla seconda (2)

$$y(t) = v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{6}$$
$$v_y(t) = v_0 \sin\theta - g t \tag{7}$$

2. **Energia potenziale**
   La quantità energia potenziale definita dal testo come $E_P = mgy$. Pertanto il suo andamento temporale è semplicemente determinato da quello della coordinata $y(t)$:

$$E_P(t) = mgy(t) = mg\,(v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2) \tag{8}$$

ed ed quello di una parabola con concavità rivolta verso il basso (vedi Fig.1). All'istante $t = 0$ è nulla, mentre l'istante t^* in cui raggiunge il massimo è dato da

$$\begin{aligned} \frac{dE_P}{dt} &= 0 \\ &\Downarrow \\ mg\left(v_0 \sin\theta - gt\right) &= 0 \\ &\Downarrow \\ t^* &= \frac{v_0 \sin\theta}{g} \end{aligned} \tag{9}$$

Sostituendo i valori, otteniamo

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{4\,\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}}\sin\frac{\pi}{3}}{9.81\,\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}^2}} = \\ &= \frac{4\,\frac{\sqrt{3}}{2}}{9.81}\,\mathrm{s} = \\ &= 0.35\,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{10}$$

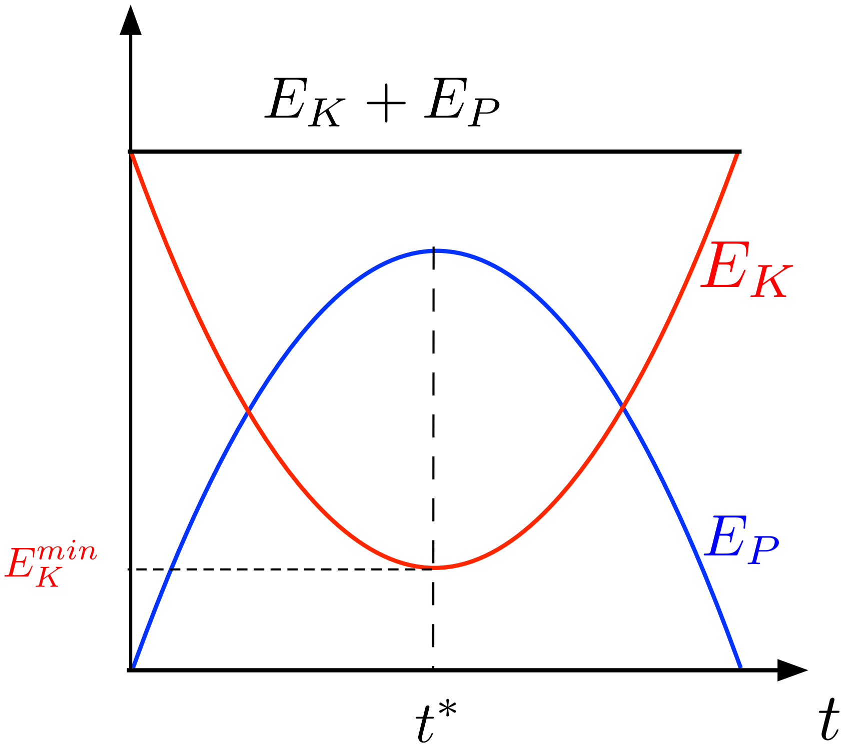


Figure 1:

3. **Energia cinetica**
La quantità energia cinetica definita dal testo come $E_K = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2)$. Pertanto il suo andamento temporale è semplicemente determinato dai quadrati delle leggi orarie delle velocità

$$
\begin{aligned}
E_K(t) &= \frac{1}{2}m(v_x^2(t)+v_y^2(t)) = \\
& \quad \text{[sostituisco la seconda Eq.(6) e seconda Eq.(6)]} = \\
&= \frac{1}{2}m\left(v_0^2\cos^2\theta + (v_0\sin\theta - gt)^2\right) = \qquad (11)\\
&= \frac{1}{2}m\left(v_0^2\cos^2\theta + v_0^2\sin^2\theta - 2gv_0 t\sin\theta + g^2t^2\right) =
\end{aligned}
$$

e dunque

$$
E_K(t) = \frac{1}{2}m\left(v_0^2 - 2gv_0 t\sin\theta + g^2t^2\right) \qquad (12)
$$

L'andamento nel tempo è quello di una parabola con concavità rivolta verso l'alto (vedi Fig.1). Il suo valore minimo si può determinare osservando che la (11) è la somma di due quadrati, di cui uno è costante nel tempo, mentre l'altro dipende dal tempo. Il valore minimo di E_K è raggiunto quando il secondo quadrato si annulla, ossia all'istante

$$
v_0\sin\theta - gt = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t^* = \frac{v_0\sin\theta}{g} \qquad \begin{array}{l}\text{(lo stesso istante a cui}\\ \text{l'energia potenziale è massima)}\end{array} \qquad (13)
$$

e vale

$$
E_K^{min} = \frac{1}{2}mv_0^2\cos^2\theta \qquad (14)
$$

4. **Energia totale**
Calcoliamo ora la somma di energia cinetica e potenziale

$$
\begin{aligned}
E_{tot}(t) &= E_K(t) + E_P(t) = \\
&= \frac{1}{2}m\left(v_0^2 - 2gv_0 t\sin\theta + g^2t^2\right) + mg\left(v_0\sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2\right) \\
&= \frac{1}{2}mv_0^2 - mgv_0 t\sin\theta + \frac{1}{2}mg^2t^2 + mg\, v_0\sin\theta\, t - \frac{1}{2}mg^2t^2 \\
&= \frac{1}{2}mv_0^2 = \text{cost} \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Peranto, mentre E_P e E_K separatamente variano nel tempo, la loro somma rimane costante (ed è pari all'energia cinetica all'istante iniziale). Di conseguenza il massimo di E_P corrisponde al minimo di E_K.