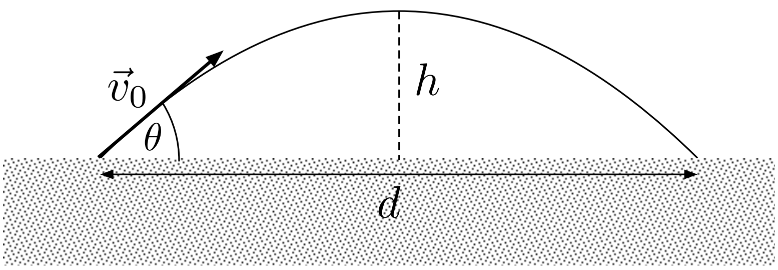
Esercizio (tratto dal Problema 2.16 del Mazzoldi 2)

Un giocatore di golf lancia una palla a una distanza $d = 75\,\mathrm{m}$ dal punto di lancio. L'altezza massima che la palla ha raggiunto nella sua traiettoria è $h = 20\,\mathrm{m}$. Assumendo che il terreno sia piano e che la resistenza dell'aria sia trascurabile, calcolare:

1. le componenti orizzontale e verticale della velocità iniziale $\vec{v}_0$ della palla

2. le componenti normale e tangenziale dell'accelerazione nell'istante dell'impatto col suolo.



SOLUZIONE

DATI NOTI
$h = 20\,\mathrm{m}$
$d = 75\,\mathrm{m}$

Osserviamo anzitutto che il vettore velocità iniziale $\vec{v}_0$ (ignoto) si scompone in

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\,\hat{u}_x + v_{0y}\,\hat{u}_y \tag{1}$$

e che

- il moto lungo x è rettilineo uniforme, con velocità $v_x(t) \equiv v_{0x}$

- il moto lungo y è uniformemente accelerato, con velocità iniziale $v_y(t = 0) \equiv v_{0y}$ e accelerazione $-g$

Sfruttando questi ingredienti possiamo determinare:

1. **velocità iniziale** $\vec{v}_0$

   - Per il moto uniformemente accelerato lungo y vale la formula

     $$\frac{v_{y,fin}^2 - v_{y,in}^2}{2\Delta y} = a_y \tag{2}$$

     e possiamo dunque applicarla in particolare al tratto di moto (lungo y) che va dall'istante iniziale di lancio all'istante in cui la palla raggiunge l'altezza massima h della traiettoria, ottenendo

     $$\begin{aligned} \frac{0^2 - v_{0y}^2}{2h} &= -g \\ &\Downarrow \\ v_{0y} &= \sqrt{2gh} \end{aligned} \tag{3}$$

     Sostituendo i valori, otteniamo

     $$v_{0y} \;=\; \sqrt{2 \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 20\,\mathrm{m}} = 19.8\,\mathrm{m/s} \tag{4}$$

   - Per determinare v_{0x} possiamo procedere in due modi:

     1^0 **modo**
     Ricordando che

     $$\text{moto uniformemente accelerato lungo } y \quad \Rightarrow \quad v_y(t) = v_{0y} - gt \quad , \tag{5}$$

     troviamo l'istante t_{top} in cui la palla raggiunge l'altezza massima annullando la velocità lungo y

     $$v_y(t_{top}) = v_{0y} - gt_{top} = 0 \quad \rightarrow \quad t_{top} = \frac{v_{0y}}{g} \tag{6}$$

     Dato che la traiettoria è simmetrica attorno al vertice, il tempo di caduta è il doppio di t_{top}

     $$t_{cad} = 2\,t_{top} = \frac{2v_{0y}}{g} \tag{7}$$

Sfruttando ora il fatto che

$$\text{moto rettilineo uniforme lungo } x \quad \Rightarrow \quad x(t) = v_{0x}\, t \quad , \tag{8}$$

abbiamo che

$$d = x(t_{cad}) = v_{0x}\, t_{cad} = v_{0x} \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} \tag{9}$$

da cui ricaviamo che

$$\begin{aligned} v_{0x} &= \frac{g\,d}{2v_{0y}} = \\ & \quad [\text{uso la } (3)] \\ &= \frac{g\,d}{2\sqrt{2gh}} = \\ &= d\sqrt{\frac{g}{8h}} \end{aligned} \tag{10}$$

Sostituendo i valori, otteniamo

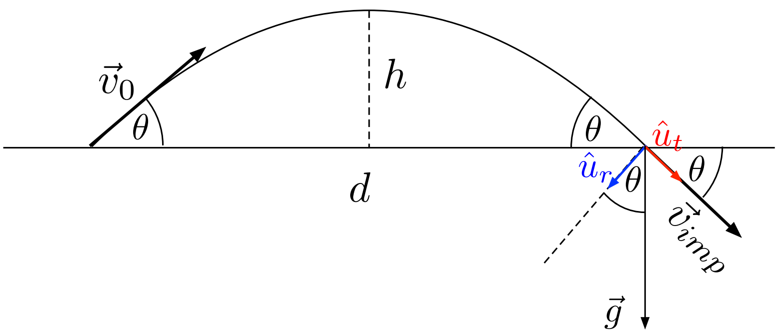
$$v_{0x} = 75\,\mathrm{m}\sqrt{\frac{9.81\,\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}^2}}{8\cdot 20\,\cancel{\mathrm{m}}}} = 18.6\,\mathrm{m/s} \tag{11}$$

2^0 **modo**
Dato che l'altezza del punto di lancio e di quello di caduta sono gli stessi, possiamo sfruttare la formula della gittata

$$d = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{2v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g} = \frac{2\,\underbrace{v_0\cos\theta}\,\underbrace{v_0\sin\theta}}{g} = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} \tag{12}$$

che proprio la (9). Da questo punto procediamo come nel modo precedente, ottenendo la (10).

2. **componenti tangeziale e normale dell'accelerazione**



- Anzitutto osserviamo che, dato che l'altezza del punto di lancio e di caduta sono gli stessi, per ragioni di simmetria l'angolo che la traiettoria forma con l'orizzontale al momento dell'impatto è uguale all'angolo iniziale θ di lancio. Tale angolo θ è determinato da

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{v_{0x}}{|\vec{v}_0|} = \dfrac{v_{0x}}{\sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}} \\[2ex] \sin\theta = \dfrac{v_{0y}}{|\vec{v}_0|} = \dfrac{v_{0y}}{\sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}} \end{cases} \tag{13}$$

- L'accelerazione è (ad ogni istante, dunque anche all'istante d'impatto al suolo) pari all'accelerazione di gravità
$$\vec{a} = \vec{g} = -g\,\hat{u}_y \tag{14}$$
Pertanto
  - La componente tangenziale dell'accelerazione è la componente di $\vec{a}$ lungo la direzione di $\hat{u}_t$, ossia
$$a_t = |\vec{g}|\,\sin\theta = \frac{g\,v_{0y}}{\sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}} \tag{15}$$
    Sostituendo i valori trovati nelle Eq.(4) e (11) , otteniamo
$$a_t = \frac{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,19.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\sqrt{(18.6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 + (19.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2}} = 7.14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{16}$$
  - La componente normale dell'accelerazione è la componente di $\vec{a}$ lungo la direzione di $\hat{u}_r$, ossia
$$a_r = |\vec{g}|\,\cos\theta = \frac{g\,v_{0x}}{\sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}} \tag{17}$$
    Sostituendo i valori ottenuti nelle Eq.(4) e (11), otteniamo
$$a_r = \frac{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,18.6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\sqrt{(18.6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 + (19.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2}} = 6.72\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{18}$$