Esercizio (tratto dal Problema 1.14 del Mazzoldi)

Determinare in quali condizioni l'altezza massima raggiunta dalla traiettoria parabolica di un proiettile lanciato dal suolo è uguale alla gittata.

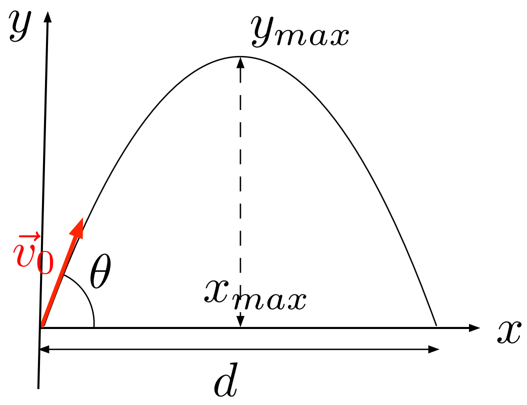

Figure 1: Traiettoria parabolica del punto materiale

SOLUZIONE

- Ricaviamo anzitutto le leggi orarie del punto materiale. Scegliamo l'origine $(0,0)$ nel punto di lancio del punto materiale.

  Indicando con θ l'angolo di lancio, il vettore velocità iniziale ha componenti

$$\vec{v}_0 = v_0(\cos\theta, \sin\theta) \tag{1}$$

  Dato che l'accelerazione $\vec{g} = (0, -g)$ di gravità è diretta lungo l'asse verticale y, il moto lungo y è uniformemente accelerato (con accelerazione verso il basso), mentre il moto lungo x è rettilineo uniforme.

  Pertanto le leggi orarie dei due moti sono

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & v_0 \cos\theta \, t \\ y(t) & = & v_0 \sin\theta \, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{array} \right. \tag{2}$$

- Partendo dalle legge oraria (2) ricaviamo ora l'equazione $y(x)$ della traiettoria. Per fare ciò dobbiamo eliminare il parametro tempo t dalle leggi orarie. Dalla prima delle (2) ricaviamo

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta} \tag{3}$$

  e lo sostituiamo nella seconda delle (2), ottenendo

$$y = v_0 \sin\theta \, \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta} \right)^2 \tag{4}$$

  ossia

$$\boxed{y(x) = x \, \tan\theta - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} \, x^2} \tag{5}$$

- Ricaviamo ora la formula per la gittata d, che è ottenuta cercando i valori di x per i quali il punto materiale è a terra, ossia imponendo che (5) si annulli

$$y = x \left(\tan\theta - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} \, x \right) = 0 \tag{6}$$

  Ricaviamo, oltre alla soluzione $x_1 = 0$ (corrispondente al punto di lancio), la soluzione

$$x_2 = \frac{2 v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g} \tag{7}$$

  corrispondente al punto di caduta. Dunque la gittata $d = x_2 - x_1$ vale

$$d = \frac{2 v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g} \tag{8}$$

- Il punto di massima altezza della traiettoria è localizzato a metà della gittata, ossia

$$x_{max} = \frac{d}{2} = \frac{v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g} \tag{9}$$

e l'altezza massima si ottiene direttamente inserendo la (9) nella (5)

$$\begin{aligned} y_{max} &= \frac{v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g} \tan\theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} \left(\frac{v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g} \right)^2 = \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \end{aligned} \tag{10}$$

ossia

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \tag{11}$$

- Imponiamo ora che la gittata d sia uguale all'altezza massima:

$$\begin{aligned} d &= y_{max} \\ &\Downarrow \\ \frac{2v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g} &= \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \\ &\Downarrow \\ \tan\theta &= 4 \end{aligned} \tag{12}$$

Pertanto l'angolo di lancio per il quale l'altezza massima coincide con la gittata vale

$$\theta = \arctan 4 \tag{13}$$

che corrisponde ad un angolo di circa 76^o.

Osserviamo che la condizione ottenuta è *indipendente* dal modulo della velocità di lancio.