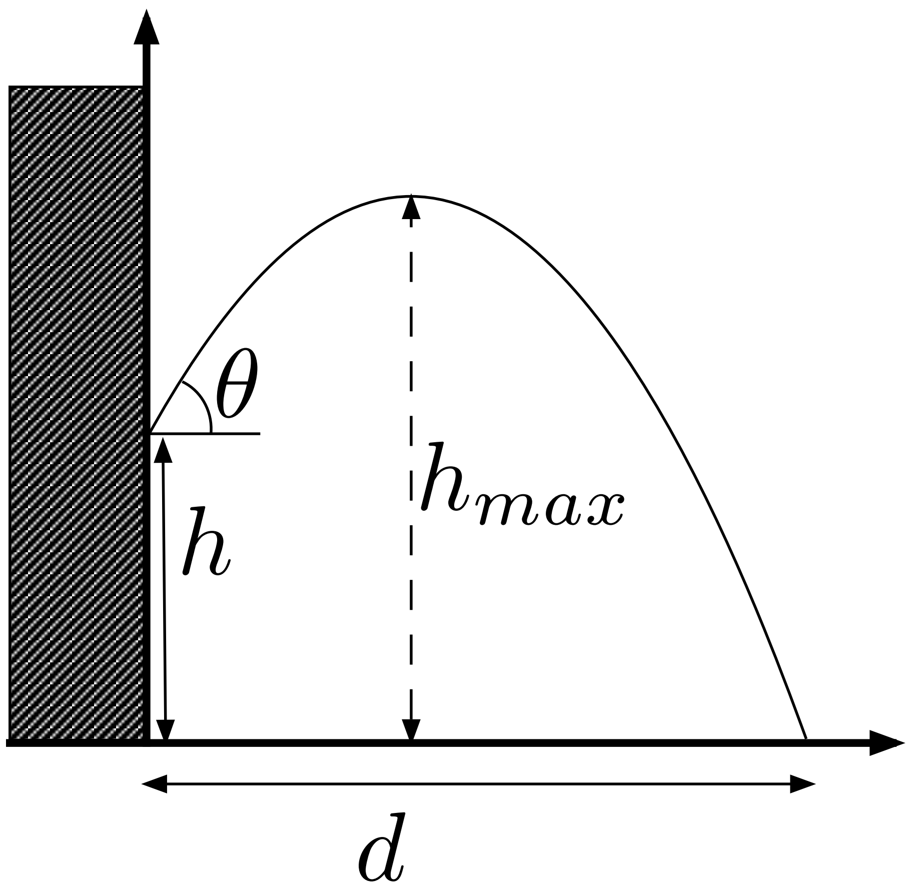
Esercizio

Un oggetto viene lanciato dal balcone di una finestra con velocità iniziale di modulo $v_0 = 15\,\mathrm{m/s}$, ad un angolo $\theta = 60^o$ rispetto all'orizzontale. La finestra si trova ad un'altezza h di $8\,\mathrm{m}$ dal suolo. Determinare:

1. l'altezza massima h_{max} a cui giunge l'oggetto;
2. il tempo t^* che impiega per cadere al suolo;
3. la posizione e la velocità all'istante $t^*/2$;
4. a quale distanza d l'oggetto cade rispetto alla posizione orizzontale del punto di lancio;
5. l'equazione cartesiana $y(x)$ della traiettoria:
6. l'andamento nel tempo della quantità $E_p = mgy$ (detta energia potenziale), dove y è l'altezza dal suolo;
7. l'andamento nel tempo della quantità $E_k = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$ (detta energia cinetica);
8. l'andamento nel tempo della loro somma $E_m = E_k + E_p$ (detta energia meccanica).



SOLUZIONE
Dati noti:

$$\begin{aligned} v_0 &= |\vec{v}_0| = 15\,\mathrm{m/s} \\ \theta &= \pi/3 \\ h &= 8\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

- Il vettore velocità iniziale
$$\vec{v}_0 = v_{0x}\,\hat{u}_x \,+\, v_{0y}\,\hat{u}_y \tag{1}$$
ha componenti
$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\theta \\ v_{0y} = v_0 \sin\theta \end{cases} \tag{2}$$

- Scegliamo come origine dei tempi ($t = 0$) l'istante del lancio. Scomponiamo il moto nelle componenti x e y
$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{u}_x + y(t)\,\hat{u}_y \tag{3}$$
Abbiamo:

  - Moto lungo x: rettilineo uniforme (non ci sono forze lungo x)
  $$x(t) = v_{0x}\,t \tag{4}$$
  - Moto lungo y: rettilineo uniformemente accelerato (in y agisce la forza peso)
  $$y(t) = h + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{5}$$
  (**NB:** errore frequente: dimenticarsi il segno '-' nell'accelerazione di gravità g.)

1. Per determinare l'altezza massima possiamo procedere in due modi:

   Primo modo
   Dalla legge oraria (5) lungo y possiamo ricavare la legge per la componente y della velocità, derivando rispetto al tempo:
   $$v_y(t) = v_{0y} - gt \tag{6}$$
   L'istante t_{top} in cui l'oggetto raggiunge l'altezza massima è quello in cui la velocità v_y si annulla (si osservi che solo la velocità v_y si annulla alla sommità, mentre la componente v_x rimane sempre costante, essendo il moto lungo x rettilineo uniforme):
   $$0 \;=\; v_y(t_{top}) = v_{0y} - gt_{top} \qquad \Rightarrow \qquad t_{top} = \frac{v_{0y}}{g} \tag{7}$$
   Sostituendo in $y(t)$ si ottiene
   $$\begin{aligned} h_{max} = y(t_{top}) &= h + v_{0y}t_{top} - \frac{1}{2}gt_{top}^2 = \\ &= h + v_{0y}\frac{v_{0y}}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 = \\ &= h + \frac{1}{2}\frac{v_{0y}^2}{g} \end{aligned} \tag{8}$$

Sostituendo i valori numerici

$$\begin{aligned}
h_{max} &= h + \frac{1}{2}\frac{v_{0y}^2}{g} = \\
&= h + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} = \\
&= h + \frac{v_0^2 \sin^2(\pi/3)}{2g} = \\
&= 8\,\mathrm{m} + \frac{(15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \\
&= \left(8 + 225 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{19.62}\right)\,\mathrm{m} = \\
&= 16.6\,\mathrm{m}
\end{aligned} \tag{9}$$

Secondo modo
Siccome il moto lungo y è uniformemente accelerato, posso applicare la formula

$$a = \frac{v_{fin}^2 - v_{in}^2}{2\,\Delta s} \tag{10}$$

al tratto di moto tra l'altezza di lancio e l'altezza massima.
Attenzione: stiamo considerando la componente lungo y, quindi nell'Eq.(10) vanno sostituite le *sole* componenti y della velocità, e non il modulo della velocità totale (che comprende anche la componente x e che rimane sempre costante.)

$$\begin{aligned}
a &= -g \\
v_{in} &= v_{0y} \\
v_{fin} &= 0 \;\; \text{(alla sommità)} \\
\Delta s &= \Delta h \;\; \text{(variazione di altezza dal punto di lancio alla sommità)}
\end{aligned}$$

Sostituendo nell'Eq.(10) otteniamo

$$\Delta h = \frac{v_{0y}^2}{2g} \tag{11}$$

Sommando questa variazione all'altezza iniziale, si ottiene

$$h_{max} = h + \Delta h = h + \frac{v_{0y}^2}{2g} \tag{12}$$

e si arriva allo stesso risultato ottenuto precedentemente.

2. Per determinare il tempo t^* di caduta al suolo possiamo procedere in due modi:

Primo modo
Consideriamo la legge oraria lungo y

$$y(t) = h + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{13}$$

L'istante t^* in cui l'oggetto cade al suolo è quello in cui la coordinata y si annulla

$$0 = y(t^*) \quad = \quad h + v_{0y} t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} \tag{14}$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{-v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 + 2gh}}{-g} = \\ &= \frac{v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 + 2gh}}{g} \end{aligned} \tag{15}$$

Osserviamo che una soluzione dà un tempo negativo e l'altra un tempo positivo. Scartiamo la soluzione negativa perché ci interessa ciò che succede <u>dopo</u> il lancio.

$$t^* = \frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2gh}}{g} \tag{16}$$

Sostituendo i valori otteniamo

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{v_0 \sin\theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2gh}}{g} = \\ &= \frac{15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\left(15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 \frac{3}{4} + 2 \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 8\,\mathrm{m}}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \\ &= \frac{12.99\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + \sqrt{325.71\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \\ &= \frac{(12.99\ + 18.05)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \\ &= 3.16\,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{17}$$

Secondo modo
Possiamo scomporre il tempo di caduta lungo y in due tratti:
-il tempo per raggiungere la sommità (t_{top})
-il tempo di caduta libera dalla sommità al suolo (t_{cl})

Per il primo tratto abbiamo osservato in precedenza che

$$v_y(t) = v_{0y} - gt \qquad \Rightarrow \qquad t_{top} = \frac{v_{0y}}{g} \tag{18}$$

Per il secondo tratto è una caduta libera con velocità inizile nulla da un'altezza h_{max}. Possiamo pertanto utilizzare la formula

$$t_{cl} = \sqrt{\frac{2h_{max}}{g}} \tag{19}$$

Attenzione: la formula (19) vale solo se la velocità iniziale è nulla. Sarebbe stato sbagliato applicarla all'altezza iniziale

$$t_{cl} \neq \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{20}$$

dato che all'istante del lancio la velocità iniziale non è nulla.

Sostituendo l'espressione

$$h_{max} = h + \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

trovata in precedenza per h_{max} [Eq.(8) o (12)] nell'Eq.(19) si ottiene

$$\begin{aligned} t_{cl} &= \sqrt{\frac{2h_{max}}{g}} = \\ &= \sqrt{\frac{2\left(h + \frac{v_{0y}^2}{2g}\right)}{g}} = \\ &= \sqrt{\frac{2gh + v_{0y}^2}{g^2}} = \\ &= \frac{1}{g}\sqrt{v_{0y}^2 + 2gh} \end{aligned} \tag{21}$$

Il tempo totale t^* che l'oggetto impiega per cadere è

$$\begin{aligned} t^* &= t_{top} + t_{cl} = \\ &= \frac{v_{0y}}{g} + \frac{1}{g}\sqrt{v_{0y}^2 + 2gh} = \\ &= \frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2gh}}{g} \end{aligned} \tag{22}$$

che coincide col risultato trovato col primo modo.

3. Per ricavare la posizione e la velocità all'istante $t = t^*/2$ procedo così:

   - Per la posizione considero la legge oraria (3) del vettore posizione

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{u}_x + y(t)\,\hat{u}_y \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{r}(t) = (x(t)\,,\,y(t)) \tag{23}$$

   dove [vedi Eq.(4)-(5)]

$$\left\{ \begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos\theta\, t \\ y(t) &= h + v_0 \sin\theta\, t - \tfrac{1}{2} g\, t^2 \end{aligned} \right. \tag{24}$$

   e la valuto all'istante $t = t^*/2$, ottenendo:

$$\begin{aligned} x(t = \frac{t^*}{2}) &= v_0 \cos\theta\, \frac{t^*}{2} = \\ &= 15 \frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}}} \underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{=\frac{1}{2}} \frac{3.16\,\cancel{\mathrm{s}}}{2} = \\ &= 11.85\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{25}$$

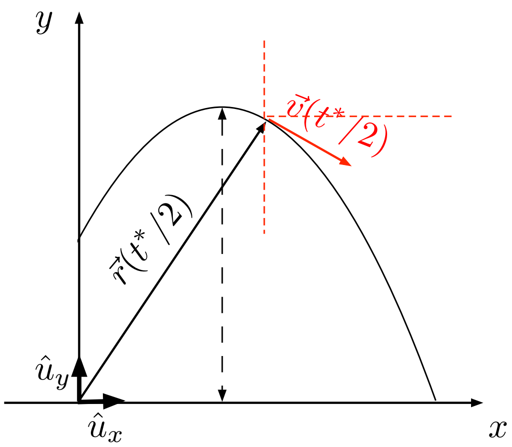
e

$$\begin{aligned} y(t=\frac{t^*}{2}) &= h + v_0 \sin\theta\, \frac{t^*}{2} - \frac{1}{2} g \left(\frac{t^*}{2}\right)^2 = \\ &= 8\,\mathrm{m} + 15 \frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}}} \underbrace{\sin\frac{\pi}{3}}_{=\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{3.16\cancel{\mathrm{s}}}{2} - \frac{1}{2} 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}^2}} \left(\frac{3.16\cancel{\mathrm{s}}}{2}\right)^2 = \\ &= 8\,\mathrm{m} + 20.52\,\mathrm{m} - 12.24\,\mathrm{m} = \\ &= 16.28\,\mathrm{m} \end{aligned} \qquad (26)$$

Pertanto

$$\vec{r}(t=\frac{t^*}{2}) = (11.85\,\mathrm{m}\,,\, 16.28\,\mathrm{m}) \qquad (27)$$

come mostrato in figura.



- Per la velocità calcolo la legge oraria del vettore velocità derivando rispetto al tempo la legge oraria (28) e (24) del vettore posizione

$$\vec{v}(t) = \underbrace{\frac{dx}{dt}(t)}_{v_x(t)}\ \hat{u}_x + \underbrace{\frac{dy}{dt}(t)}_{v_y(t)}\ \hat{u}_y \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{v}(t) = (v_x(t)\,,\, v_y(t)) \qquad (28)$$

dove [vedi Eq.(24)]

$$\begin{cases} v_x(t) &= \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\theta \\ v_y(t) &= \frac{dy}{dt}(t) = v_0 \sin\theta\, - g\, t \end{cases} \qquad (29)$$

e la valuto all'istante $t = t^*/2$, ottenendo:

$$v_x(t=\frac{t^*}{2}) = 15 \frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}}} \underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{=\frac{1}{2}} = 7.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad (30)$$

e

$$
\begin{aligned}
v_y(t=\frac{t^*}{2}) &= v_0\sin\theta - g\,\frac{t^*}{2} = \\
&= 15\frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}}}\underbrace{\sin\frac{\pi}{3}}_{=\frac{\sqrt{3}}{2}} - 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^{\cancel{2}}}\,\frac{3.16\cancel{\mathrm{s}}}{2} = \\
&= 12.99\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 15.50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \\
&= -2.51\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad (31)
\end{aligned}
$$

come mostrato in figura dal vettore in rosso.

4. **NB:** Non si tratta di un problema del calcolo della gittata. Nel calcolo tipico della gittata il punto di lancio e il punto di caduta si trovano alla stessa altezza, mentre qui si trovano ad altezze diverse. Non si può pertanto applicare la formula $x_G = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta)$ per la gittata. Attenzione ad applicare le formule nelle condizioni in cui si possono applicare.

   Avendo determinato l'istante t^* di caduta (=in cui y si annulla), il punto di caduta si determina sostituendo t^* nell'equazione del moto lungo x

$$x(t) = v_{0x}t \qquad (32)$$

   dove $x_0 = 0$ e $v_{0x} = v_0\cos\theta$. Quindi

$$
\begin{aligned}
d &= x(t^*) = v_{0x}t^* = \\
&= v_0\cos\theta\left(\frac{v_{0y}+\sqrt{v_{0y}^2+2gh}}{g}\right) \qquad (33)
\end{aligned}
$$

   Sostituendo i valori numerici

$$d = 15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{=1/2}\cdot 3.16\,\mathrm{s} = 23.7\,\mathrm{m} \qquad (34)$$

5. Per determinare l'equazione cartesiana della parabola osserviamo che le leggi orarie

$$
\begin{aligned}
x(t) &= v_{0x}\,t \qquad (35)\\
y(t) &= h + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (36)
\end{aligned}
$$

   costituiscono una rappresentazione parametrica della traiettoria (dove il parametro è il tempo). Per passare alla rappresentazione cartesiana, dobbiamo eliminare il parametro t dalle due equazioni. Dalla prima abbiamo

$$t = \frac{x}{v_{0x}} \qquad (37)$$

   e sostituendo nella seconda

$$y = h + v_{0y}\frac{x}{v_{0x}} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2 \qquad (38)$$

   e dunque si ottiene

$$y = h + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}\,x - \frac{g}{2v_{0x}^2}\,x^2 \qquad (39)$$

   che rappresenta una parabola, disegnata in figura, la cui curvatura dipende dall'accelerazione di gravità g e dalla componente v_{0x} della velocità iniziale.

6. L'energia potenziale E_p è immediatamente ottenuto dalla legge oraria della posizione verticale y

$$\begin{aligned} E_p(t) &= mgy(t) = \\ &\quad [\text{uso la (5)}] \\ &= mg(h + v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2) \end{aligned}$$

e dunque

$$E_p(t) = mgh + mgv_0 \sin\theta\, t - \frac{m}{2} g^2 t^2 \tag{40}$$

che rappresenta una parabola con la concavità verso il basso.

7. L'energia cinetica E_k è ottenuta dalla legge oraria (29) della velocità

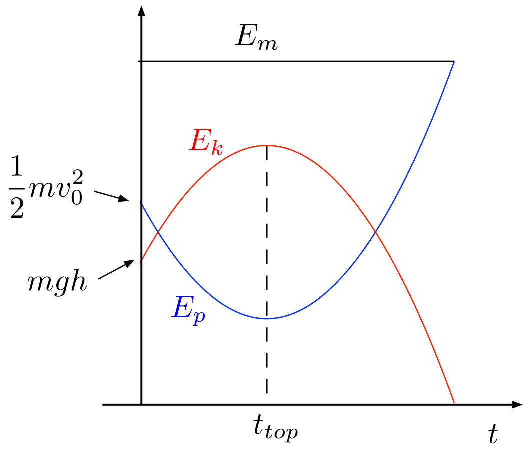
$$\begin{aligned} E_k(t) &= \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 = \\ &= \frac{1}{2} m \left(v_x^2(t) + v_y^2(t) \right) = \\ &\quad [\text{uso la (29)}] \\ &= \frac{1}{2} m \left(v_0^2 \cos^2\theta + (v_0 \sin\theta - g\, t)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} m \left(v_0^2 \cos^2\theta + v_0^2 \sin^2\theta v_0 - 2 v_0 \sin\theta\, g\, t + g^2\, t^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} m \left(v_0^2 - 2 v_0 \sin\theta\, g\, t + g^2\, t^2 \right) \end{aligned}$$

e dunque

$$E_k(t) = \frac{1}{2} m v_0^2 - mgv_0 \sin\theta\, t + \frac{1}{2} m g^2\, t^2 \tag{41}$$

NB: Un errore comune (e molto grave!) è quello di scrivere l'energia cinetica come

$$E_k(t) = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m \left(v_x + v_y \right)^2 \qquad \textbf{SBAGLIATO}$$



8. L'energia meccanica E_m si ottiene sommando l'energia cinetica (41) e l'energia potenziale (40), ottenendo

$$\begin{aligned} E_m(t) &= E_k(t) + E_p(t) = \\ &= \frac{1}{2} m v_0^2 - mgv_0 \sin\theta\, t + \frac{1}{2} m g^2\, t^2 \;+\; mgh + mgv_0 \sin\theta\, t - \frac{m}{2} g^2 t^2 = \\ &= \frac{1}{2} m v_0^2 + mgh \end{aligned} \tag{42}$$

ed osservo dunque che, mentre l'energia cinetica e l'energia potenziale variano entrambe nel tempo, la loro somma (energia meccanica) rimane *costante* nel tempo.

L'andamento delle tre energie è mostrato in figura.