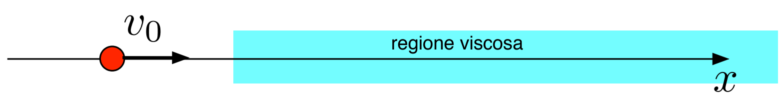
Esercizio

Una particella si muove lungo l'asse x con velocità costante pari a $2\,\mathrm{m/s}$. Ad un certo punto entra in una regione in cui è presente un liquido viscoso, ed il suo moto viene smorzato con una costante di smorzamento $\gamma = 3\,\mathrm{s}^{-1}$. Calcolare:

1. Qual è il tempo di smorzamento;
2. Qual è la distanza percorsa all'interno della regione viscosa dopo $1\,\mathrm{s}$ dall'ingresso in tale regione;
3. Qual è la sua velocità in tale istante;
4. Qual è la distanza totale che la particella percorre all'interno della regione viscosa;



SOLUZIONE

DATI NOTI
$v_0 = 2\,\mathrm{m/s}$
$\gamma = 3\,\mathrm{s}^{-1}$

- Conviene scegliere l'origine dell'asse x all'inizio della regione viscosa, e l'origine dei tempi all'istante in cui la particella entra nella regione viscosa.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(0) & = & 0 \\ \\ v(0) & = & v_0 \end{array} \right. \tag{1}$$

In tal modo la legge oraria della velocità del moto smorzato si può esprimere come

$$\boxed{v(t) = v_0\, e^{-\gamma t}} \tag{2}$$

CONTROLLO: se inserisco il tempo $t = 0$ nell'Eq.(2) ottengo $v(0) = v_0$. Dunque il significato della costante v_0 che appare nella (2) è proprio la velocità della particella all'istante iniziale d'ingresso nella regione viscosa, proprio come indicato dalla seconda equazione (1).

- Per ottenere la legge oraria della posizione, sfruttiamo la definizione di velocità ed il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^t v(t')\,dt' & = & \displaystyle\int_0^t \frac{dx}{dt'}\,dt' = x(t) - \underbrace{x(0)}_{=0} \\ & \Downarrow & \\ x(t) & = & \displaystyle\int_0^t v(t')\,dt' \\ & \Downarrow & [\text{uso la } (2)] \\ x(t) & = & \displaystyle\int_0^t v_0\, e^{-\gamma t'}\,dt' \\ & \Downarrow & \\ x(t) & = & v_0 \left[-\dfrac{e^{-\gamma t'}}{\gamma} \right]_{t'=0}^{t'=t} \end{array} \tag{3}$$

In conclusione

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t}\right)} \tag{4}$$

A questo punto, avendo la legge oraria della posizione e della velocità possiamo trovare tutto ciò che è richiesto.

1. Il tempo di smorzamento è per definizione l'inverso della costante γ che determina il decadimento esponenziale della velocità

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{3\,\mathrm{s}^{-1}} = 0.33\,\mathrm{s} \tag{5}$$

è una costante, data dall'inverso del tempo di smorzamento τ.

2. Dato che che abbiamo scelto come origine dello spazio e del tempo la posizione e l'istante d'ingresso nella regione viscosa, la distanza percorsa dopo 1 s dall'ingresso nella regione viscosa semplicemente data dalla posizione della particella all'istante $t = 1\,\mathrm{s}$. Basta dunque inserire tale istante nella legge oraria (4):

$$\begin{aligned} x(t = 1\,\mathrm{s}) &= \frac{v_0}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t}\right) \\ &= \frac{2\frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}}}}{3\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}}}\left(1 - e^{-3\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}}\cdot 1\cancel{\mathrm{s}}}\right) \\ &= \frac{2}{3}\left(1 - e^{-3}\right)\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

e dunque

$$x(t = 1\,\mathrm{s}) = 0.63\,\mathrm{m} \tag{6}$$

3. Analogamente, la velocità a tale istante è ottenuta inserendo $t = 1\,\mathrm{s}$ nella legge oraria (2) della velocità

$$\begin{aligned} v(t = 1\,\mathrm{s}) &= v_0\, e^{-\gamma t} = \\ &= 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\, e^{-3\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}}\cdot 1\cancel{\mathrm{s}}} = \\ &= 2\, e^{-3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

e dunque

$$v(t = 1\,\mathrm{s}) = 0.10\,\mathrm{m} \tag{7}$$

4. La distanza totale percorsa dalla particella all'interno della regione viscosa si ottiene prendendo la sua posizione all'istante $t = \infty$

$$\begin{aligned} D &= x(\infty) \\ &\Downarrow \text{[uso la (4)]} \\ &= \frac{v_0}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma\infty}\right) \\ &= \frac{v_0}{\gamma} \end{aligned} \tag{8}$$

Sostituendo i valori otteniamo che la distanza totale che la particella percorre all'interno della regione viscosa è

$$D = \frac{2\frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}}}}{3\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}}} = 0.66\,\mathrm{m} \tag{9}$$

Osservazione: confrontando la (6) e la (9) si nota che dopo solo 1 s la particella ha già percorso quasi tutta la distanza D all'interno della regione viscosa. Questo accade perché il tempo $t = 1\,\mathrm{s}$ è 3 volte superiore al tempo di smorzamento (5).