Esercizio (tratto dal Problema 1.26 del Mazzoldi Nuovo)

Un corpo puntiforme si muove di moto smorzato lungo x. Al tempo $t = 0$ il punto si trova nell'origine. Al tempo di arresto $t = \infty$ lo spazio percorso è $x(\infty) = 1.8\,\mathrm{m}$. Si conosce il tempo di smorzamento $\tau = 75\,\mathrm{s}$.

1. Ricavare la legge oraria $x(t)$ del punto materiale e trovare la velocità iniziale v_0;

2. Trovare l'instante a cui il punto materiale ha percorso metà della distanza totale.

SOLUZIONE

DATI NOTI
$x(\infty) = 1.8\,\mathrm{m}$
$\tau = 75\,\mathrm{s}$

1. Nel moto smorzato la velocità decresce esponenzialmente nel tempo, secondo la legge

$$v(t) = v_0\, e^{-\gamma t} \tag{1}$$

dove v_0 è la velocità iniziale, mentre

$$\gamma = \frac{1}{\tau} \tag{2}$$

è una costante, data dall'inverso del tempo di smorzamento τ.

2. Per trovare la legge oraria, sfruttiamo il fatto che la velocità è la derivata della legge oraria, e applichiamo il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\begin{aligned}
\int_0^t v(t')dt' &= \int_0^t \frac{dx}{dt'}dt' = x(t) - \underbrace{x(0)}_{=0} \\
\int_0^t v_0\, e^{-\gamma t'}dt' &= x(t) \\
v_0 \left[-\frac{e^{-\gamma t'}}{\gamma} \right]_{t'=0}^{t'=t} &= x(t) \\
\frac{v_0}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t}\right) &= x(t)
\end{aligned} \tag{3}$$

da cui

$$x(t) = \frac{v_0}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t}\right) \tag{4}$$

3. Sfruttiamo ora l'informazione sullo spazio totale percorso. Sostituendo in (4) il tempo $t = \infty$ abbiamo

$$\begin{aligned}
x(\infty) &= \frac{v_0}{\gamma} = \\
& \quad \text{[uso la (2)]} \\
&= v_0\, \tau
\end{aligned} \tag{5}$$

da cui ricaviamo la velocità iniziale v_0

$$v_0 = \frac{x(\infty)}{\tau} \tag{6}$$

Sostituendo i valori otteniamo

$$v_0 = \frac{1.8\,\mathrm{m}}{75\,\mathrm{s}} = 0.024\,\mathrm{m/s} \tag{7}$$

4. L'istante t^* in cui la particella ha percorso metà della distanza totale, ossia si trova ad $x(\infty)/2$, è dato da

$$\begin{aligned} x(t^*) &= \frac{x(\infty)}{2} \\ &\Downarrow \quad \text{[uso la legge oraria (4)]} \\ \frac{v_0}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t^*}\right) &= \frac{x(\infty)}{2} \\ &\Downarrow \\ 1 - e^{-\gamma t^*} &= \frac{\gamma\, x(\infty)}{2v_0} \end{aligned} \tag{8}$$

Ricordando ora che $x(\infty) = v_0\tau$ [dalla (6)] e che $\gamma = 1/\tau$ [dalla (2)], otteniamo

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\gamma t^*} &= \frac{1}{2} \\ &\Downarrow \\ \frac{1}{2} &= e^{-\gamma t^*} \\ &\Downarrow \\ 2 &= e^{\gamma t^*} \\ &\Downarrow \\ \gamma t^* &= \ln 2 \\ &\Downarrow \\ \frac{t^*}{\tau} &= \ln 2 \end{aligned} \tag{9}$$

Ricordando la (2) otteniamo

$$t^* = \tau \ln 2 \tag{10}$$

e dunque vale

$$t^* = 75\,\mathrm{s}\,\ln 2 = 52.0\,\mathrm{s} \tag{11}$$