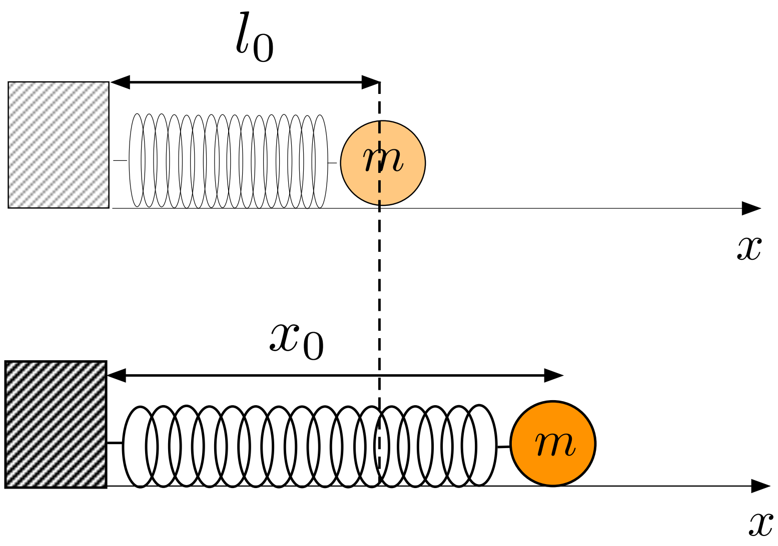
Esercizio

Una pallina di massa $m = 2\,\mathrm{kg}$ è attaccata all'estremo destro di una molla. L'estremo sinistro della molla è fissato ad una parete, alla cui base è posta l'origine dell'asse x. La pallina viene tirata verso destra, allungando la molla fino alla posizione $x_0 = 3\,\mathrm{m}$. All'istante $t = 0$ la pallina viene rilasciata, e si osserva che essa si muove di moto armonico oscillando attorno alla posizione $l_0 = 2\,\mathrm{m}$ di riposo della molla, con periodo $T = 4\,\mathrm{s}$.

1. determinare la legge oraria $x(t)$ della pallina e della sua velocità $v(t)$;
2. calcolare l'andamento temporale della quantità $E_K(t) = \frac{1}{2}mv^2(t)$ (detta energia cinetica);
3. calcolare l'andamento nel tempo della quantità $E_P(t) = \frac{1}{2}m\omega^2(x(t) - l_0)^2$ (detta energia potenziale);
4. mostrare che la somma di E_K ed E_P è costante nel tempo



SOLUZIONE

DATI INIZIALI

$x(t = 0\,\mathrm{s}) = x_0 = 0.3\,\mathrm{m}$
$v(t = 0\,\mathrm{s}) = 0$
$l_0 = 1\,\mathrm{m}$
$T = 4\,\mathrm{s}$

1. Il centro di oscillazione corrisponde al punto di lunghezza a riposo della molla. La legge oraria di un moto armonico attorno al centro di oscillazione l_0 si può scrivere

$$x(t) = \underbrace{x_c}_{=l_0} + A\sin(\omega t + \varphi) \tag{1}$$

e la legge oraria della velocità di ottiene prendendone la derivata rispetto al tempo

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi) \tag{2}$$

- La pulsazione ω è legata al periodo di oscillazione tramite la relazione

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4\,\mathrm{s}} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{s}^{-1} \tag{3}$$

- Le costanti A e φ in (1) e (2) devono essere determinate sfruttando le due informazioni che il testo ci dà sulla posizione e velocità iniziali. Sostituendo l'istante $t = 0$ nella (1) e (2) otteniamo

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(0) & = & l_0 + A\sin\varphi = x_0 \\ & & \\ v(0) & = & A\omega\cos\varphi = 0 \end{array} \right. \tag{4}$$

  - Dalla seconda relazione otteniamo

$$\cos\varphi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} \tag{5}$$

  - Sostituendo $\varphi = \pi/2$ nella prima equazione otteniamo

$$A = x_0 - l_0 \tag{6}$$

Sostituendo i valori di A e di φ nelle leggi orarie (1) e (2) otteniamo

$$\begin{array}{lcl} x(t) & = & l_0 + (x_0 - l_0)\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \\ & & \\ v(t) & = & (x_0 - l_0)\omega\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \end{array} \tag{7}$$

ossia

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & l_0 + (x_0 - l_0)\cos(\omega t) \\ & & \\ v(t) & = & -(x_0 - l_0)\omega\sin(\omega t) \end{array} \right.} \tag{8}$$

dove x_0 e l_0 sono noti.

2. Possiamo ora facilmente calcolare l'andamento temporale dell'energia cinetica

$$
\begin{aligned}
E_K(t) &= \frac{1}{2}mv^2(t) = \\
& \quad \text{[uso la seconda Eq.(8)]} \\
&= \frac{1}{2}m(x_0-l_0)^2\omega^2\sin^2(\omega t)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

che ha un periodo $T' = \frac{\pi}{\omega} = T/2$. Il suo grafico è rappresentato dalla curva blu in Fig.1.

3. Analogamente possiamo calcolare l'andamento temporale dell'energia potenziale

$$
\begin{aligned}
E_P(t) &= \frac{1}{2}m\omega^2(x(t)-l_0)^2 = \\
& \quad \text{[uso la prima Eq.(8)]} \\
&= \frac{1}{2}m(x_0-l_0)^2\omega^2\cos^2(\omega t)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Anch'essa ha un periodo $T' = \frac{\pi}{\omega} = T/2$. Il grafico di E_P è rappresentato dalla curva rossa in Fig.1.

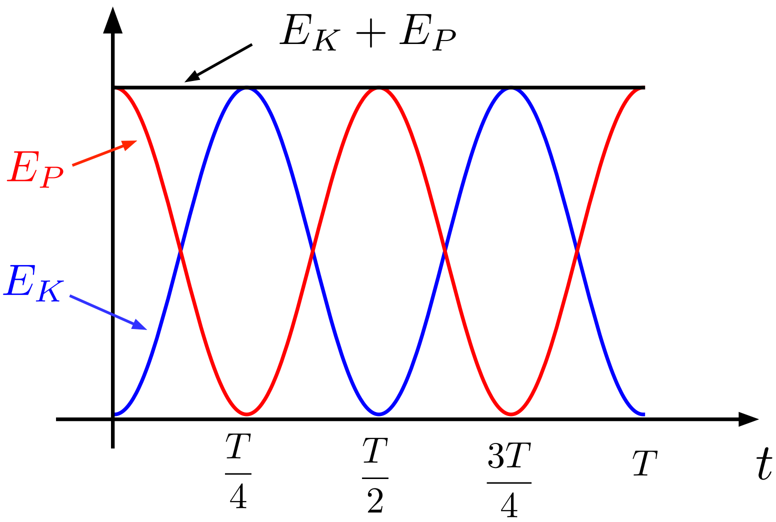


Figure 1:

4. Calcoliamo ora la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale

$$
\begin{aligned}
E_{tot}(t) &= E_K(t) + E_P(t) = \\
&= \frac{1}{2}m(x_0-l_0)^2\omega^2\sin^2(\omega t) + \frac{1}{2}m(x_0-l_0)^2\omega^2\cos^2(\omega t) = \\
&= \frac{1}{2}m(x_0-l_0)^2\omega^2\underbrace{\left(\sin^2(\omega t)+\cos^2(\omega t)\right)}_{=1}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

ossia

$$
E_{tot}(t) \equiv \frac{1}{2}m(x_0-l_0)^2\omega^2 \quad = \text{const} \tag{12}
$$

Pertanto, mentre ciascuna delle due energie varia nel tempo (curve blu e rossa in Fig.1), la loro somma (curva nera in Fig.1) si mantiene costante nel tempo: se una cresce l'altra diminuisce e viceversa.