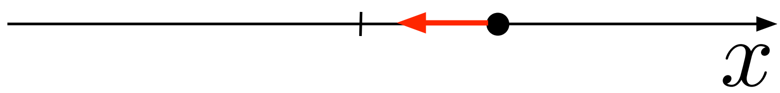
Esercizio (tratto dal Problema 1.7 del Mazzoldi)

Un punto materiale che si muove di moto armonico attorno all'origine, con periodo $T = 4.4.$s, si trova al tempo $t = 0$ nella posizione $x(0) = 0.28\,$m con velocità $v(0) = -2.5$m/s. Scrivere la legge oraria e calcolare i valori massimi della velocità e dell'accelerazione.



SOLUZIONE

DATI NOTI
$x_c = 0$
$x(0) = 0.28\,\mathrm{m}$
$v(0) = -2.5\mathrm{m/s}$
$T = 4.4\,\mathrm{s}$

1. Per un generico moto armonico la legge oraria si può scrivere

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \tag{1}$$

Conseguentemente, le leggi orarie della velocità e dell'accelerazione valgono rispettivamente

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi) \tag{2}$$

e

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi) \quad . \tag{3}$$

In tutte queste leggi orarie:

- la pulsazione ω ci è nota attraverso il periodo

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4.4\,\mathrm{s}} = 1.428\,\mathrm{s}^{-1} \tag{4}$$

- l'ampiezza A è un'incognita
- l'angolo φ è un'incognita

2. Per determinare le due incognite A e φ sfruttiamo le due informazioni che il testo ci dà sulla posizione e velocità iniziali. Sostituendo l'istante $t = 0$ nella (1) e (2) otteniamo

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(0) & = & A\sin\varphi \\ & & \\ v(0) & = & A\omega\cos\varphi \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{lcl} \sin\varphi & = & \frac{x(0)}{A} > 0 \\ & & \\ \cos\varphi & = & \frac{v(0)}{A\omega} < 0 \end{array}\right. \tag{5}$$

Pertanto

- Dalla (5) deduciamo che φ si trova nel secondo quadrante [vedi Fig.1], e vale

$$\begin{array}{rcl} \tan\varphi & = & \dfrac{x(0)\omega}{v(0)} \\ & \Downarrow & \\ \varphi & = & \pi + \arctan\left(\dfrac{x(0)\omega}{v(0)}\right) \end{array} \tag{6}$$

NB: Per definizione l'arctan restituisce angoli ϕ compresi nell'intervallo $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, ossia nel primo e nel quarto quadrante. Nel caso specifico, l'angolo $\arctan\left(\frac{x(0)\omega}{v(0)}\right)$ è nel quarto quadrante [vedi angolo tratteggiato in Fig.1], dato che l'argomento è negativo ($v(0) < 0$). Per ottenere φ, che si trova invece nel secondo quadrante, occorre dunque aggiungere π a

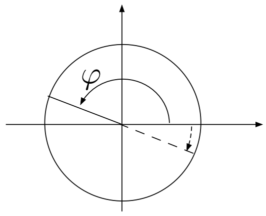


Figure 1: L'angolo φ si trova nel secondo quadrante. L'angolo angolo $\arctan\left(\frac{x(0)\omega}{v(0)}\right)$ si trova nel quarto.

tale angolo.

Sostituendo i valori, otteniamo

$$\begin{aligned}\varphi &= \pi - \arctan\left(\frac{0.28\,\cancel{m}\cdot 1.428\,\frac{1}{\cancel{s}}}{2.5\frac{\cancel{m}}{\cancel{s}}}\right) = \\ &= \pi - \arctan(0.1599) = \\ &= 2.983 \end{aligned} \tag{7}$$

- Sostituendo ora φ nella prima delle (5) otteniamo

$$A = \frac{x(0)}{\sin\varphi} = \frac{0.28\,\mathrm{m}}{\sin(2.983)} = 1.773\,\mathrm{m} \tag{8}$$

3. A questo punto ci è tutto noto nelle leggi orarie, e dunque possiamo trovare i valori massimi della velocità e accelerazione, rispettivamente dati da

   - velocità massima

$$\begin{aligned} v_{max} &= \omega A = \\ &= \frac{1.428}{\mathrm{s}}\,1.773\,\mathrm{m} = 2.53\,\mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{9}$$

   - accelerazione massima

$$\begin{aligned} a_{max} &= \omega^2 A = \\ &= \frac{1.428^2}{\mathrm{s}^2}\,1.773\,\mathrm{m} = 3.62\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned} \tag{10}$$