Esercizio

Osservando il moto di una particella, si nota che essa compie oscillazioni armoniche con un periodo costante $T = 2\,\mathrm{s}$. Si vuole determinare la coordinata x_c del centro di oscillazione. A tale scopo si effettuano tre misure di posizione e velocità, rilevando che:

i) all'istante $t = 0\,\mathrm{s}$ la particella si trova alla posizione $x_0 = 0.7\,\mathrm{m}$;
ii) all'istante $t = 1\,\mathrm{s}$ la particella si trova alla posizione $x_1 = 2\,\mathrm{m}$;
iii) all'istante $t = 2\,\mathrm{s}$, la velocità della particella è $v_2 = -2\,\mathrm{m/s}$.

Calcolare:

1. la coordinata x_c del centro di oscillazione;

2. in quali istanti la particella passa per x_c;

SOLUZIONE

DATI NOTI:
$T = 2\,\mathrm{s}$
$x(t = 0\,\mathrm{s}) = x_0 = 0.7\,\mathrm{m}$
$x(t = 1\,\mathrm{s}) = x_1 = 2\,\mathrm{m}$
$v(t = 2\,\mathrm{s}) = v_2 = -2\,\mathrm{m/s}$

1. La legge oraria di un moto armonico centrato attorno alla posizione x_c si può scrivere nella forma:
$$x(t) = x_c + C\cos(\omega t) \,+\, D\sin(\omega t) \tag{1}$$
dove la pulsazione ω è legata al periodo tramite
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\,\mathrm{s}} = \pi\,\mathrm{s}^{-1} \tag{2}$$
Al contrario, x_c, e le costanti C e D vanno determinare in base ai dati noti.

   - Sostituiamo $t = 0\,\mathrm{s}$ nella legge oraria (1):
$$\begin{aligned} x(t = 0\,\mathrm{s}) &= x_c + C\,\cos(\pi\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}}\cdot 0\cancel{\mathrm{s}}) \,+\, D\sin(\pi\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}}\cdot 0\cancel{\mathrm{s}}) = \\ &= x_c + C\,\cos(0) + D\sin(0) \,= \\ &= x_c + C \,\,= \\ &= x_0 \end{aligned}$$

   - Sostituiamo $t = 1\,\mathrm{s}$ nella legge oraria (1):
$$\begin{aligned} x(t = 1\,\mathrm{s}) &= x_c + C\,\cos(\pi\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}}\cdot 1\cancel{\mathrm{s}}) \,+\, D\sin(\pi\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}}\cdot 1\cancel{\mathrm{s}}) = \\ &= x_c + C\,\cos(\pi) + D\sin(\pi) \,= \\ &= x_c - C \,\,= \\ &= x_1 \end{aligned}$$

   - Troviamo la legge oraria della velocità facendo la derivata rispetto al tempo della legge oraria (1)
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega C\,\sin(\omega t) \,+\, \omega\,D\cos(\omega t) \tag{3}$$
e sostituiamo $t = 2\,\mathrm{s}$ nella legge oraria (3):
$$\begin{aligned} v(t = 2\,\mathrm{s}) &= -\omega C\,\sin(\pi\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}}\cdot 2\cancel{\mathrm{s}}) \,+\, D\cos(\pi\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}}\cdot 2\cancel{\mathrm{s}}) = \\ &= -\omega C\,\sin(2\pi) + D\omega\cos(2\pi) \,= \\ &= D\omega \,\,= \\ &= v_2 \end{aligned}$$

Dai dati noti abbiamo dunque un sistema di tre equazioni per le tre incognite x_c, C e D in termini dei dati noti x_0, x_1 e v_2

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t=0\,\mathrm{s}) & = & x_c + C \; = x_0 \\ \\ x(t=1\,\mathrm{s}) & = & x_c - C \; = x_1 \\ \\ v(t=2\,\mathrm{s}) & = & D\omega \; = v_2 \end{array} \right. \tag{4}$$

Il sistema si risolve facilmente prendendo la somma e la differenza delle prime due equazioni ed ottenendo

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_c & = & \dfrac{x_0 + x_1}{2} \\ \\ C & = & \dfrac{x_0 - x_1}{2} \\ \\ D & = & \dfrac{v_2}{\omega} \end{array} \right. \tag{5}$$

Sostituendo i valori numerici di x_0 e x_1 e v_2, si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_c & = & 1.35\,\mathrm{m} \\ \\ C & = & -0.65\,\mathrm{m} \\ \\ D & = & \dfrac{-2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\pi\frac{1}{\mathrm{s}}} = -\dfrac{2}{\pi}\,\mathrm{m} \end{array} \right. \tag{6}$$

A questo punto conosciamo tutto della legge oraria (1).

2. Gli istanti t_n per i quali la particella passa dal centro di oscillazione sono dati dalla condizione

$$\begin{array}{rcl} x(t_n) & = & x_c \\ & \Downarrow & \\ x_c + C\cos(\omega t_n) \; + \; D\sin(\omega t_n) & = & x_c \\ & \Downarrow & \\ C\cos(\omega t_n) & = & -\,D\sin(\omega t_n) \\ & \Downarrow & \\ \tan(\omega t_n) & = & -\dfrac{C}{D} \\ & & [\text{uso l'Eq.(6)}] \\ \tan(\omega t_n) & = & -\dfrac{0.65\,\mathrm{m}}{\frac{2}{\pi}\,\mathrm{m}} = -1.021 \end{array} \tag{7}$$

Pertanto abbiamo

$$\omega t_n = -\arctan(1.021) + \pi n \tag{8}$$

ossia

$$
\begin{aligned}
t_n &= \frac{1}{\omega}\left(-\arctan(1.021)+\pi n\right) \\
&\quad \text{[uso l'Eq.(2)]} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\arctan(1.021)+\pi n\right)\ \mathrm{s} \\
&= \left(-\frac{\arctan(1.021)}{\pi}+n\right)\ \mathrm{s} \\
&\quad [\text{calcolo } \arctan(1.021)/\pi = 0.314]
\end{aligned}
$$

Otteniamo quindi

$$
t_n = (n - 0.314)\ \mathrm{s} \tag{9}
$$

Osservazione: la particella passa per l'origine ad intervalli di 1 s. Ciò è consistente col fatto che il periodo sia 2 s dato che la particella passa per origine con segno alternato della velocit