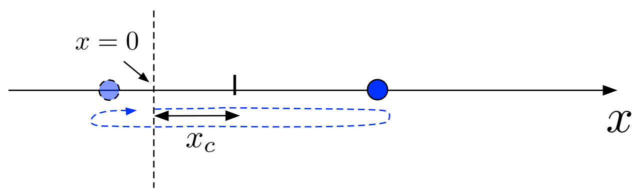
Esercizio

Un punto materiale si muove lungo lungo l'asse x oscillando attorno alla posizione $x_c = 1.5\,\mathrm{m}$ con un moto armonico di pulsazione $\omega = (\pi/4)\,\mathrm{s}^{-1}$. All'istante $t = 0$ passa per la posizione $0.3\,\mathrm{m}$ con velocità $v_0 = 6\,\mathrm{m/s}$. Calcolare:

1. qual è la posizione della particella all'istante t^* che corrisponde ad un quarto del periodo
2. qual è la velocità della particella a tale istante



SOLUZIONE

DATI NOTI:
$x_c = 1.5\,\text{m}$
$\omega = \frac{\pi}{4}\,\text{s}^{-1}$
$x(t=0) = x_0 = 0.3\,\text{m}$
$v(t=0) = v_0 = 6\,\text{m/s}$

1. La legge oraria di un moto armonico centrato attorno alla posizione x_c si può scrivere nella forma:
$$x(t) = x_c + C\cos(\omega t) \, + \, D\sin(\omega t) \tag{1}$$
dove ω e x_c ci sono noti, mentre C e D sono costanti che dobbiamo determinare in base ai dati noti.

   - Sostituiamo $t = 0\,\text{s}$ nella legge oraria (1):
$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_c + C\,\cos(\frac{\pi}{4}\frac{1}{\cancel{s}}\cdot 0\cancel{s}) \, + \, D\sin(\frac{\pi}{4}\frac{1}{\cancel{s}}\cdot 0\cancel{s}) = \\ &= x_c + C\,\cos(0) + D\sin(0) \, = \\ &= x_c + C \, = \\ &= x_0 \end{aligned}$$
   - Troviamo la legge oraria della velocità calcolando la derivata rispetto al tempo della legge oraria (1)
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega C\,\sin(\omega t) \, + \, \omega\, D\cos(\omega t) \tag{2}$$
e sostituiamo $t = 0\,\text{s}$ nella legge oraria (2):
$$\begin{aligned} v(t=0) &= -\omega C\,\sin(\frac{\pi}{4}\frac{1}{\cancel{s}}\cdot 0\cancel{s}) \, + \, D\cos(\frac{\pi}{4}\frac{1}{\cancel{s}}\cdot 0\cancel{s}) = \\ &= -\omega C\,\sin(0) + D\omega\cos(0) \, = \\ &= D\omega \, = \\ &= v_0 \end{aligned}$$
Dai dati noti abbiamo dunque un sistema di due equazioni per le due incognite C e D in termini dei dati noti x_0 e v_0
$$\left\{ \begin{aligned} x(t=0) &= x_c + C \, = x_0 \\ \\ v(t=0) &= D\omega \, = v_0 \end{aligned} \right. \tag{3}$$
Il sistema si risolve facilmente ottenendo
$$\left\{ \begin{aligned} C &= x_0 - x_c \\ \\ D &= \frac{v_0}{\omega} \end{aligned} \right. \tag{4}$$

Sostituendo i valori numerici di x_0 e x_1, si ottiene

$$\left\{\begin{array}{rcl} C & = & -1.2\,\mathrm{m} \\ \\ D & = & \dfrac{6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\frac{\pi}{4}\,\frac{1}{\mathrm{s}}} = \dfrac{24}{\pi}\ \ \mathrm{m} = 7.64\,\mathrm{m} \end{array}\right. \tag{5}$$

A questo punto conosciamo tutto della legge oraria (1) e possiamo trovare ciò che è richiesto:

2. Anzitutto troviamo l'istante t^* a cui è richiesto di calcolare posizione e velocità. Dato che il periodo del moto armonico vale

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}\,\mathrm{s}^{-1}} = 8\,\mathrm{s} \tag{6}$$

abbiamo

$$t^* = \frac{T}{4} = 2\,\mathrm{s} \tag{7}$$

3. Per conoscere la posizione della particella all'istante $t = 2\,\mathrm{s}$, basta sostituire nella legge oraria (1) tale istante ed i valori trovati in (5)

$$\begin{aligned} x(t = 2\,\mathrm{s}) &= 1.5\,\mathrm{m} - 1.2\,\mathrm{m} \cdot \cos(\frac{\pi}{4}\,\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}} \cdot 2\,\cancel{\mathrm{s}}) + 7.64\,\mathrm{m} \cdot \sin(\frac{\pi}{4}\,\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}} \cdot 2\,\cancel{\mathrm{s}}) = \\ &= 1.5\,\mathrm{m} - 1.2\,\mathrm{m} \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) + 7.64\,\mathrm{m} \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) = \\ &= 1.5\,\mathrm{m} + 7.64\,\mathrm{m} = \\ &= 9.14\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{8}$$

4. Per conoscere la velocità della particella all'istante $t = 2\,\mathrm{s}$ basta sostituire nella legge oraria (2) della velocità tale istante ed i valori trovati in (5), ottenendo:

$$\begin{aligned} v(t = 2\,\mathrm{s}) &= -\frac{\pi}{4}\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot (-1.2\,\mathrm{m}) \cdot \sin(\frac{\pi}{4}\,\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}} \cdot 2\,\cancel{\mathrm{s}}) + \frac{\pi}{4}\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 7.64\,\mathrm{m} \cdot \cos(\frac{\pi}{4}\,\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}} \cdot 2\,\cancel{\mathrm{s}}) = \\ &= \frac{\pi}{4}\left(1.2\ \sin(\frac{\pi}{2}) + 7.64\cos(\frac{\pi}{2})\right)\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot 1.2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \\ &= 0.94\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{9}$$