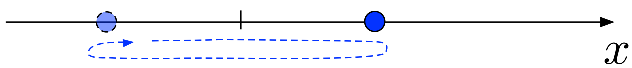
Esercizio

Una particella si muove lungo l'asse x con moto armonico centrato attorno all'origine. All'istante $t = 0$ la particella si trova nella posizione $x_0 = 20\,\mathrm{cm}$, mentre all'istante $t = 1\,\mathrm{s}$ si trova alla posizione $x_1 = 0.5\,\mathrm{m}$. Sapendo che la pulsazione del moto armonico vale $\omega = (\pi/3)\,\mathrm{s}^{-1}$, calcolare:

1. dove si trova la particella all'istante $t = 2\,\mathrm{s}$
2. qual è la velocità in tale istante;
3. qual è l'accelerazione in tale istante



SOLUZIONE

DATI NOTI:
$x(t=0) = x_0 = 0.2\,\mathrm{m}$
$x(t=1\,\mathrm{s}) = x_1 = 0.5\,\mathrm{m}$
$\omega = \frac{\pi}{3}\,\mathrm{s}^{-1}$

PRIMO MODO
La legge oraria di un moto armonico centrato attorno all'origine si può scrivere nella forma:

$$x(t) = C\,\cos(\omega t) \;+\; D\sin(\omega t) \tag{1}$$

dove ω ci è nota, mentre C e D sono costanti che dobbiamo determinare in base ai dati noti.

- Sostituiamo $t = 0\,\mathrm{s}$ nella legge oraria (1):

$$\begin{aligned} x(t=0) &= C\,\cos(\frac{\pi}{3}\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}}\cdot 0\cancel{\mathrm{s}}) \;+\; D\sin(\frac{\pi}{3}\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}}\cdot 0\cancel{\mathrm{s}}) = \\ &= C\,\cos(0) + D\sin(0) \;= \\ &= C \end{aligned} \tag{2}$$

- Sostituiamo $t = 1\,\mathrm{s}$ nella legge oraria (1):

$$\begin{aligned} x(t=1\,\mathrm{s}) &= C\,\cos(\frac{\pi}{3}\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}}\cdot 1\cancel{\mathrm{s}}) \;+\; D\sin(\frac{\pi}{3}\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}}\cdot 1\cancel{\mathrm{s}}) = \\ &= C\,\cos(\frac{\pi}{3}) + D\sin(\frac{\pi}{3}) \;= \\ &= \frac{C}{2} + \frac{D\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

Dai dati noti x_0 e x_1 abbiamo dunque un sistema di due equazioni per le due incognite C e D

$$\begin{cases} x(t=0) \quad = \; C \;= x_0 \\ \\ x(t=1\,\mathrm{s}) \;=\; \dfrac{C}{2} + \dfrac{D\sqrt{3}}{2} \;= x_1 \end{cases} \tag{4}$$

Il sistema si risolve facilmente ottenendo

$$\begin{cases} C \;=\; x_0 \\ \\ D \;=\; \dfrac{2x_1 - x_0}{\sqrt{3}} \end{cases} \tag{5}$$

Sostituendo i valori numerici di x_0 e x_1, si ottiene

$$\begin{cases} C \;=\; 0.200\,\mathrm{m} \\ \\ D \;=\; \dfrac{2\cdot 0.5\,\mathrm{m} - 0.2\,\mathrm{m}}{\sqrt{3}} = 0.462\,\mathrm{m} \end{cases} \tag{6}$$

A questo punto conosciamo tutto della legge oraria (1) e possiamo trovare ciò che è richiesto:

1. Per sapere la posizione della particella all'istante $t = 2\,\mathrm{s}$, basta sostituire tale istante nella legge oraria

$$
\begin{aligned}
x(t = 2\,\mathrm{s}) &= 0.2\,\mathrm{m}\,\cdot \cos(\frac{\pi}{3}\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}} \cdot 2\cancel{\mathrm{s}}) \,+\, 0.462\,\mathrm{m} \cdot \sin(\frac{\pi}{3}\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}} \cdot 2\cancel{\mathrm{s}}) = \\
&= 0.2\,\mathrm{m}\,\cos(\frac{2\pi}{3}) + 0.462\,\mathrm{m}\,\sin(\frac{2\pi}{3}) = \\
&= 0.2\,\mathrm{m}\,(-\frac{1}{2}) + 0.462\,\mathrm{m}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \\
&= 0.30\,\mathrm{m}
\end{aligned} \tag{7}
$$

2. Per conoscere la velocità della particella all'istante $t = 2\,\mathrm{s}$ troviamo prima la legge oraria della velocità facendo la derivata rispetto al tempo della legge oraria (1)

$$
v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega C\,\sin(\omega t) \,+\, \omega\,D\cos(\omega t) \tag{8}
$$

Poi inseriamo nell'Eq.(8) il valore $t = 2\,\mathrm{s}$ ed i valori di C e D trovati nell'Eq.(6), ottenendo:

$$
\begin{aligned}
v(t = 2\,\mathrm{s}) &= -\frac{\pi}{3}\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 0.2\,\mathrm{m}\,\cdot \sin(\frac{\pi}{3}\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}} \cdot 2\cancel{\mathrm{s}}) \,+\, \frac{\pi}{3}\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 0.462\,\mathrm{m} \cdot \cos(\frac{\pi}{3}\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}} \cdot 2\cancel{\mathrm{s}}) = \\
&= \left(-\frac{\pi}{3} \cdot 0.2\,\sin(\frac{2\pi}{3}) + \frac{\pi}{3}\,0.462\cos(\frac{2\pi}{3})\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \\
&= \frac{\pi}{3}\left(-0.2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \,0.462 \cdot \frac{1}{2}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \\
&= -0.42\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned} \tag{9}
$$

3. Per conoscere l'accelerazione della particella all'istante $t = 2\,\mathrm{s}$ troviamo prima la legge oraria dell'accelerazione facendo la derivata rispetto al tempo della legge oraria (8) della velocità

$$
\begin{aligned}
a(t) &= \frac{dv}{dt} = -\omega^2 C\,\cos(\omega t) \,-\, \omega^2\,D\sin(\omega t) = \\
& \quad [\text{raccolgo } \omega^2] \\
&= -\omega^2\,\underbrace{(C\,\cos(\omega t) \,+\, D\sin(\omega t))}_{=x(t)} = \\
&= -\omega^2\,x(t)
\end{aligned} \tag{10}
$$

Pertanto osservo che basta moltiplicare la posizione per $-\omega^2$. Si ottiene dunque

$$
\begin{aligned}
a(t = 2\,\mathrm{s}) &= -\left(\frac{\pi}{3}\frac{1}{\mathrm{s}}\right)^2 \cdot 0.3\,\mathrm{m} = \\
&= 1.097\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}\,\cdot 0.3\,\mathrm{m} = \\
&= 0.33\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}
\end{aligned} \tag{11}
$$

SECONDO MODO

La legge oraria di un moto armonico centrato attorno all'origine si può equivalentemente scrivere nella forma:

$$x(t) = A\,\sin(\omega t + \varphi) \tag{12}$$

dove ω ci è nota, mentre A e φ sono costanti che dobbiamo determinare in base ai dati noti.

- Sostituiamo $t = 0\,\mathrm{s}$ nella legge oraria (12):

$$\begin{aligned} x(t=0) &= A\,\sin(\frac{\pi}{3}\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}}\cdot 0\cancel{\mathrm{s}} + \varphi) = \\ &= A\,\sin\varphi = \\ &= x_0 \end{aligned}$$

- Sostituiamo $t = 1\,\mathrm{s}$ nella legge oraria (1):

$$\begin{aligned} x(t=1\,\mathrm{s}) &= A\,\sin(\frac{\pi}{3}\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}}\cdot 1\cancel{\mathrm{s}} + \varphi) = \\ &= A\,\sin(\frac{\pi}{3} + \varphi) = \\ &= x_1 \end{aligned}$$

Dai dati noti abbiamo dunque un sistema di due equazioni per le due incognite A e φ in termini dei dati noti x_0 e x_1

$$\left\{ \begin{aligned} x(t=0) &= A\,\sin\varphi = x_0 \\ x(t=1\,\mathrm{s}) &= A\,\sin(\frac{\pi}{3}+\varphi) = x_1 \end{aligned} \right. \tag{13}$$

Per risolvere il sistema dividiamo la prima equazione per la seconda

$$\begin{aligned} \frac{\sin\varphi}{\sin(\frac{\pi}{3}+\varphi)} &= \frac{x_0}{x_1} \\ &\Downarrow \\ \frac{\sin\varphi}{\underbrace{\sin(\frac{\pi}{3})}_{=\sqrt{3}/2}\cos\varphi + \underbrace{\cos(\frac{\pi}{3})}_{=1/2}\sin\varphi} &= \frac{x_0}{x_1} \\ &\Downarrow \\ \frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}\cos\varphi+\sin\varphi} &= \frac{x_0}{x_1} \\ &\Downarrow \\ 2x_1\sin\varphi &= x_0(\sqrt{3}\cos\varphi+\sin\varphi) \\ &\Downarrow \\ (2x_1-x_0)\sin\varphi &= x_0\sqrt{3}\cos\varphi \\ &\Downarrow \\ \tan\varphi &= \frac{x_0\sqrt{3}}{2x_1-x_0} \end{aligned} \tag{14}$$

ossia

$$\varphi = \arctan\left(\frac{x_0\sqrt{3}}{2x_1 - x_0}\right) \tag{15}$$

Sostituendo i valori numerici di x_0 e x_1, si ottiene

$$\begin{aligned}\varphi &= \arctan\left(\frac{0.2\,\cancel{\mathrm{m}}\sqrt{3}}{2\cdot 0.5\,\cancel{\mathrm{m}} - 0.2\,\cancel{\mathrm{m}}}\right) = \\ &= \arctan\left(\frac{0.2\sqrt{3}}{0.8}\right) = \\ &= \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \\ &= 0.409\end{aligned} \tag{16}$$

Sostituendo ora nella prima delle Eq.(13), otteniamo

$$\begin{aligned}A\sin\varphi &= x_0 \\ &\Downarrow \\ A &= \frac{x_0}{\sin\varphi}\end{aligned} \tag{17}$$

ossia

$$A = \frac{x_0}{\sin(0.409)} \tag{18}$$

Sostituendo i valori numerici di x_0, si ottiene

$$\begin{aligned}A &= \frac{0.2\,\mathrm{m}}{\sin(0.409)} = \\ &= 0.503\,\mathrm{m}\end{aligned} \tag{19}$$

A questo punto conosciamo tutto della legge oraria (12) e possiamo trovare ciò che è richiesto:

1. Per sapere la posizione della particella all'istante $t = 2\,\mathrm{s}$, basta sostituire tale istante nella legge oraria (12)

$$\begin{aligned}x(t = 2\,\mathrm{s}) &= 0.503\,\mathrm{m}\,\sin\left(\frac{\pi}{3}\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}}\cdot 2\,\cancel{\mathrm{s}} + 0.409\right) = \\ &= 0.503\,\mathrm{m}\,\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 0.409\right) = \\ &= 0.3\,\mathrm{m}\end{aligned} \tag{20}$$

2. Per conoscere la velocità della particella all'istante $t = 2\,\mathrm{s}$ troviamo prima la legge oraria della velocità facendo la derivata rispetto al tempo della legge oraria (1)

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A\,\cos(\omega t + \varphi) \tag{21}$$

Poi inseriamo nell'Eq.(21) il valore $t = 2\,\mathrm{s}$ ed i valori di A e φ trovati nelle Eq.(16) e (19), ottenendo:

$$\begin{aligned} v(t = 2\,\mathrm{s}) &= \frac{\pi}{3}\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 0.503\,\mathrm{m} \cdot \cos(\frac{\pi}{3}\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}} \cdot 2\cancel{\mathrm{s}} + 0.409) = \\ &= \frac{\pi}{3} \cdot 0.503 \;\cos(\frac{2\pi}{3} + 0.409)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \\ &= \frac{\pi}{3} \cdot 0.503 \cdot (-0.803)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \\ &= -0.42\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{22}$$

3. Per conoscere l'accelerazione della particella all'istante $t = 2\,\mathrm{s}$ troviamo prima la legge oraria dell'accelerazione facendo la derivata rispetto al tempo della legge oraria (21) della velocità

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{dv}{dt} = -\omega^2 \underbrace{A\sin(\omega t + \varphi)}_{=x(t)} = \\ &= -\omega^2\, x(t) \end{aligned} \tag{23}$$

Pertanto osservo che basta moltiplicare la posizione per $-\omega^2$. Si ottiene dunque

$$\begin{aligned} a(t = 2\,\mathrm{s}) &= -\left(\frac{\pi}{3}\frac{1}{\mathrm{s}}\right)^2 \cdot 0.3\,\mathrm{m} = \\ &= -1.097\,\frac{1}{\mathrm{s}^2} \cdot 0.3\,\mathrm{m} = \\ &= -0.33\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned} \tag{24}$$