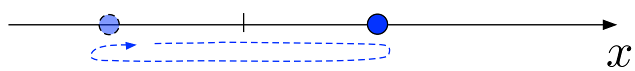
Esercizio

Una particella si muove lungo l'asse x con moto armonico centrato attorno all'origine. All'istante $t = 0$ la particella si trova nella posizione $x_0 = 40\,\mathrm{cm}$ ed ha velocità $v_0 = 5\,\mathrm{m/s}$. Sapendo che la pulsazione del moto armonico vale $\omega = (\pi/2)\,\mathrm{s}^{-1}$, calcolare:

1. la posizione della particella all'istante $t = 1\,\mathrm{s}$
2. la velocità della particella all'istante $t = 2\,\mathrm{s}$
3. l'accelerazione della particella all'istante $t = 3\,\mathrm{s}$



SOLUZIONE

DATI NOTI:
$x(t=0) = x_0 = 0.4\,\mathrm{m}$
$v(t=0) = v_0 = 5\,\mathrm{m/s}$
$\omega = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{s}^{-1}$

La legge oraria di un moto armonico centrato attorno all'origine si può scrivere nella forma:

$$x(t) = C\,\cos(\omega t) \,+\, D\sin(\omega t) \tag{1}$$

dove ω ci è nota, mentre C e D sono costanti che dobbiamo determinare in base ai dati noti.

- Sostituiamo $t = 0\,\mathrm{s}$ nella legge oraria (1):

$$\begin{aligned} x_0 = x(t=0) &= C\,\cos(\frac{\pi}{2}\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}}\cdot 0\,\cancel{\mathrm{s}}) \,+\, D\sin(\frac{\pi}{2}\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}}\cdot 0\,\cancel{\mathrm{s}}) = \\ &= C\,\cos(0) + D\sin(0) \,= \\ &= C \end{aligned} \tag{2}$$

- Troviamo la legge oraria della velocità facendo la derivata rispetto al tempo della legge oraria (1)

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega C\,\sin(\omega t) \,+\, \omega\,D\cos(\omega t) \tag{3}$$

  e sostituiamo $t = 0\,\mathrm{s}$ nella legge oraria (3):

$$\begin{aligned} v_0 = v(t=0) &= -\omega C\,\sin(\frac{\pi}{2}\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}}\cdot 0\,\cancel{\mathrm{s}}) \,+\, D\cos(\frac{\pi}{2}\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}}\cdot 0\,\cancel{\mathrm{s}}) = \\ &= -\omega C\,\sin(0) + D\omega\cos(0) \,= \\ &= D\omega \end{aligned} \tag{4}$$

  Dai dati noti abbiamo dunque un sistema di due equazioni [(2) e (4)] per le due incognite C e D in termini dei dati noti x_0 e v_0

$$\begin{cases} x_0 &= C \\ & \\ v_0 &= D\omega \end{cases} \tag{5}$$

  da cui otteniamo immediatamente

$$\begin{cases} C &= x_0 \\ & \\ D &= \dfrac{v_0}{\omega} \end{cases} \tag{6}$$

  Sostituendo i valori numerici di x_0 e x_1, si ottiene

$$\begin{cases} C &= 0.5\,\mathrm{m} \\ & \\ D &= \dfrac{5\,\frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}}}}{\frac{\pi}{2}\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}}} = 3.183\,\mathrm{m} \end{cases} \tag{7}$$

A questo punto conosciamo tutto della legge oraria (1) e possiamo trovare ciò che è richiesto:

1. Per sapere la posizione della particella all'istante $t = 1\,\mathrm{s}$, basta sostituire nella legge oraria (1) tale istante ed i valori trovati in (7)

$$\begin{aligned} x(t = 1\,\mathrm{s}) &= 0.5\,\mathrm{m} \cdot \cos(\frac{\pi}{2}\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}} \cdot 1\cancel{\mathrm{s}}) + 3.183\,\mathrm{m} \cdot \sin(\frac{\pi}{2}\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}} \cdot 1\cancel{\mathrm{s}}) = \\ &= 0.5\,\mathrm{m} \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) + 3.183\,\mathrm{m} \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) = \\ &= 3.183\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{8}$$

2. Per conoscere la velocità della particella all'istante $t = 2\,\mathrm{s}$ basta sostituire nella legge oraria (3) della velocità tale istante ed i valori trovati in (7), ottenendo:

$$\begin{aligned} v(t = 2\,\mathrm{s}) &= -\frac{\pi}{2}\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 0.5\,\mathrm{m} \cdot \sin(\frac{\pi}{2}\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}} \cdot 2\cancel{\mathrm{s}}) + \frac{\pi}{2}\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 3.183\,\mathrm{m} \cdot \cos(\frac{\pi}{2}\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}} \cdot 2\cancel{\mathrm{s}}) = \\ &= \left(\frac{\pi}{2} \cdot 0.5\ \sin(\pi) + \frac{\pi}{2} \cdot 3.183 \cos(\pi)\right) \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \\ &= \frac{\pi}{2}\,(-3.183)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \\ &= -5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{9}$$

Osservazione: Avremmo potuto dedurre questo risultato anche in un altro modo, notando che il periodo del moto armonico è $T = 2\pi/\omega = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}\,\mathrm{s}^{-1}} = 4\,\mathrm{s}$. Pertanto l'istante $t = 2\,\mathrm{s}$ cade esattamente a metà del periodo. Dopo metà periodo, la velocità del moto armonico assume un valore uguale in modulo ed opposto in segno rispetto a quello iniziale, che era di $v_0 = 5\,\mathrm{m/s}$.

3. Per conoscere l'accelerazione della particella all'istante $t = 3\,\mathrm{s}$ troviamo prima la legge oraria dell'accelerazione facendo la derivata rispetto al tempo della legge oraria (3) della velocità

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{dv}{dt} = -\omega^2 C\,\cos(\omega t) - \omega^2 D \sin(\omega t) = \\ &\quad [\text{raccolgo } \omega^2] \\ &= -\omega^2 \underbrace{(C\,\cos(\omega t) + D\sin(\omega t))}_{=x(t)} = \\ &= -\omega^2\, x(t) \end{aligned} \tag{10}$$

Pertanto si ottiene

$$\begin{aligned} a(t = 3\,\mathrm{s}) &= -\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{\mathrm{s}}\right)^2 \cdot \left(0.5\,\mathrm{m} \cdot \cos(\frac{\pi}{2}\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}} \cdot 3\cancel{\mathrm{s}}) + 3.183\,\mathrm{m} \cdot \sin(\frac{\pi}{2}\frac{1}{\cancel{\mathrm{s}}} \cdot 3\cancel{\mathrm{s}})\right) = \\ &= -2.467\,\frac{1}{\mathrm{s}^2} \cdot \left(0.5\,\mathrm{m} \cdot \cos(\frac{3\pi}{2}) + 3.183\,\mathrm{m} \cdot \sin(\frac{3\pi}{2})\right) = \\ = \\ &= -2.467\,\frac{1}{\mathrm{s}^2} \cdot (-3.183\,\mathrm{m}) = \\ = \\ &= +7.85\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned} \tag{11}$$