Esercizio (tratto dal Problema 1.3 del Mazzoldi)

In un rally automobilistico un pilota deve percorrere nel minor tempo possibilie un tratto $d = 1\,\mathrm{Km}$, partendo ed arrivando da fermo. Le caratteristiche dell'auto sono tali che l'accelerazione massima è $a_1 = 2.5\,\mathrm{m/s^2}$, mentre il sistema di freni permette una decelerazione massima $a_2 = -3.8\,\mathrm{m/s^2}$. Supponendo che il moto sia rettilineo, determinare il tempo t_f ottenuto nella prova.

SOLUZIONE

DATI INIZIALI

$d = 1000\,\mathrm{m}$
$a_1 = 2.5\,\mathrm{m/s^2}$
$a_2 = -3.8\,\mathrm{m/s^2}$

Per poter minimizzare il tempo, il pilota accelera al massimo finché è possibile, fino ad un certo istante t_1 (ancora ignoto) per poi frenare in modo da poter arrivare al traguardo con velocità nulla, come richiesto. Denotando con t_f l'istante finale di arresto (ancora ignoto), osserviamo che il moto si compone di due fasi:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \text{fase 1: } 0 \leq t \leq t_1 & \rightarrow & \text{moto uniformemente accelerato con accelerazione } a_1 \\ & & \\ \text{fase 2: } t_1 \leq t \leq t_f & \rightarrow & \text{moto uniformemente accelerato con accelerazione } a_2 \text{ (negativa)} \end{array} \right. \tag{1}$$

Scegliamo l'origine $x = 0$ nel punto di partenza dell'auto.
Possiamo risolvere il problema in due modi:

1. **PRIMO MODO**

   (a) Scriviamo la legge oraria dell'automobile per ciascuna delle due fasi del moto:

   - **Fase 1**
     Si tratta di un moto uniformemente accelerato con accelerazione a_1, di cui sappiamo che l'auto parte dall'origine e da ferma (=con velocità nulla). Pertanto abbiamo

     $$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & \frac{1}{2} a_1 t^2 \\ v(t) & = & a_1 t \\ a(t) & = & a_1 \end{array} \right. \qquad 0 \leq t \leq t_1 \tag{2}$$

     da cui possiamo ricavare la posizione e la velocità dell'auto all'istante t_1 (=istante finale di questa prima fase del moto), ossia

     $$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & x(t_1) = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \\ & & \\ v_1 & = & v(t_1) = a_1 t_1 \end{array} \right. \tag{3}$$

   - **Fase 2**
     Si tratta di un moto uniformemente accelerato con accelerazione a_2, che inizia all'istante t_1 in cui l'auto si trova alla posizione x_1 ed ha velocità v_1. Pertanto abbiamo

     $$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & x_1 + v_1(t - t_1) + \frac{1}{2} a_2 (t - t_1)^2 \\ v(t) & = & v_1 + a_2 (t - t_1) \\ a(t) & = & a_2 \end{array} \right. \qquad t_1 \leq t \leq t_f \tag{4}$$

     Sostituendo le espressioni per x_1 e v_1 trovati nella (3) otteniamo in particolare

     $$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + a_1 t_1 (t - t_1) + \frac{1}{2} a_2 (t - t_1)^2 \\ & & \\ v(t) & = & a_1 t_1 + a_2 (t - t_1) \end{array} \right. \qquad t_1 \leq t \leq t_f \tag{5}$$

La legge oraria delle due fasi è rappresentata in Fig.1, in cui la prima fase (2) è descritta da una parabola con concavità verso l'alto e la seconda fase (4) da un tratto parabolico con concavità verso il basso.

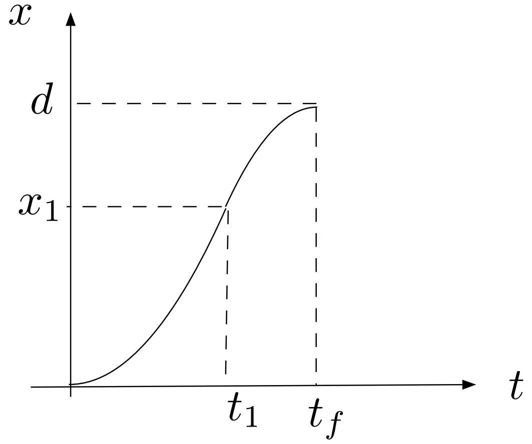

Figure 1: Grafico della legge oraria della posizione, composta dalle due fasi del moto (2) e (4).

(b) Sappiamo ora che, all'istante finale t_f della seconda fase, l'auto si trova alla posizione d e che ha velocità nulla. Pertanto imponiamo che

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t_f) & = & d \\ & & \\ v(t_f) & = & 0 \end{array} \right. \tag{6}$$

ossia, usando la (5) e sostituendovi come input l'istante $t = t_f$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t_f) = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 + a_1 t_1 (t_f - t_1) + \frac{1}{2}a_2 (t_f - t_1)^2 & = & d \\ & & \\ v(t_f) = a_1 t_1 + a_2 (t_f - t_1) & = & 0 \end{array} \right. \tag{7}$$

che è un sistema di due equazioni nelle due incognite t_1 e t_f (mentre tutti gli altri sono dati noti).

(c) Per risolvere il sistema (7), ricaviamo dalla seconda equazione

$$t_f - t_1 = -\frac{a_1\, t_1}{a_2} \tag{8}$$

e lo sostituiamo nella prima delle (7)

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}a_1 t_1^2 - a_1 t_1 \cdot \frac{a_1}{a_2}\, t_1 + \frac{1}{2}a_2 \cdot \frac{a_1^2}{a_2^2}\, t_1^2 & = & d \qquad (9) \\ & \Downarrow & \\ \frac{1}{2}a_1 t_1^2 - \frac{1}{2}\frac{a_1^2}{a_2}\, t_1^2 & = & d \qquad (10) \\ & \Downarrow & \\ a_1 t_1^2 \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) & = & 2d \qquad (11) \end{array}$$

da cui otteniamo

$$t_1 = \sqrt{\frac{2d}{a_1\left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right)}} \tag{12}$$

Dalla (8) ricaviamo ora

$$\begin{aligned} t_f &= \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) t_1 = \\ &= \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) \sqrt{\frac{2d}{a_1\left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right)}} = \\ &= \sqrt{\frac{2d}{a_1}\left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right)} = \end{aligned} \tag{13}$$

e ricordando che $a_2 = -|a_2|$ si ha

$$t_f = \sqrt{\frac{2d}{a_1}\left(1 + \frac{a_1}{|a_2|}\right)} \tag{14}$$

Sostituendo ora i dati

$$\begin{aligned} t_f &= \sqrt{\frac{2000\,\cancel{\mathrm{m}}}{2.5\,\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}^2}}\left(1 + \frac{2.5\,\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\cancel{\mathrm{s}^2}}}{3.8\,\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\cancel{\mathrm{s}^2}}}\right)} = \\ &= \sqrt{\frac{2000\,\mathrm{s}^2}{2.5} \cdot 1.6579} = \\ &= 36.4\,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{15}$$

2. **SECONDO MODO**

   (a) Scriviamo le leggi orarie della velocità nelle due fasi del moto

$$v(t) = \begin{cases} a_1 t & 0 \le t \le t_1 \\ v_1 - |a_2|(t - t_1) & t_1 \le t \le t_f \end{cases} \qquad t_1 \le t \le t_f \tag{16}$$

rappresentata graficamente in Fig.2. Dal significato di accelerazione come pendenza della legge oraria della velocità ricaviamo

$$\begin{cases} a_1 = \frac{v_1}{t_1} & \rightarrow \quad v_1 = a_1 t_1 \\ |a_2| = \frac{v_1}{t_f - t_1} & \rightarrow \quad v_1 = |a_2|(t_f - t_1) \end{cases} \tag{17}$$

Uguagliando le espressioni per v_1 si ottiene

$$a_1 t_1 = |a_2|(t_f - t_1) \tag{18}$$

$$\Downarrow$$

$$(a_1 + |a_2|)\, t_1 = |a_2| t_f \tag{19}$$

$$\Downarrow$$

$$t_1 = \frac{|a_2|}{a_1 + |a_2|} t_f \tag{20}$$

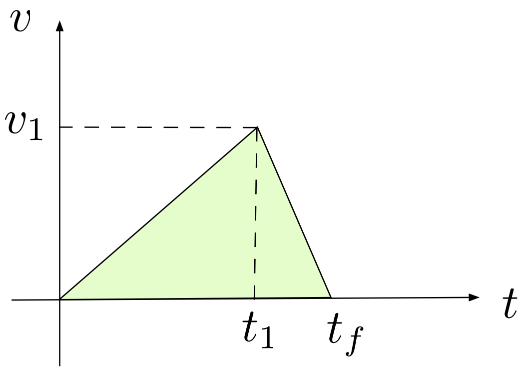

Figure 2: Grafico della legge oraria della velocità, composta dalle due fasi del moto (2) e (4).

3. Sfruttiamo ora il significato geometrico dell'area sottesa dalla legge oraria della velocità

$$\underbrace{\int_0^{t_f} v(t)\, dt}_{\text{area sottesa}} = \underbrace{x(t_f) - x(0)}_{\text{spazio percorso}} \tag{21}$$

Sfruttando l'espressione dell'area del triangolo otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{t_f \cdot v_1}{2} &= d \\ &\Downarrow \quad \text{[uso la prima delle (17)]} \\ \frac{t_f\, a_1 t_1}{2} &= d \\ &\Downarrow \quad \text{[inserisco la (20)]} \\ t_f\, a_1 \frac{|a_2|}{a_1 + |a_2|} t_f &= 2d \\ &\Downarrow \\ t_f^2 &= \frac{2d}{a_1} \frac{a_1 + |a_2|}{|a_2|} \\ t_f &= \sqrt{\frac{2d}{a_1}\left(1 + \frac{a_1}{|a_2|}\right)} \end{aligned} \tag{22}$$

che coincide col risultato (14) trovato nel primo modo.