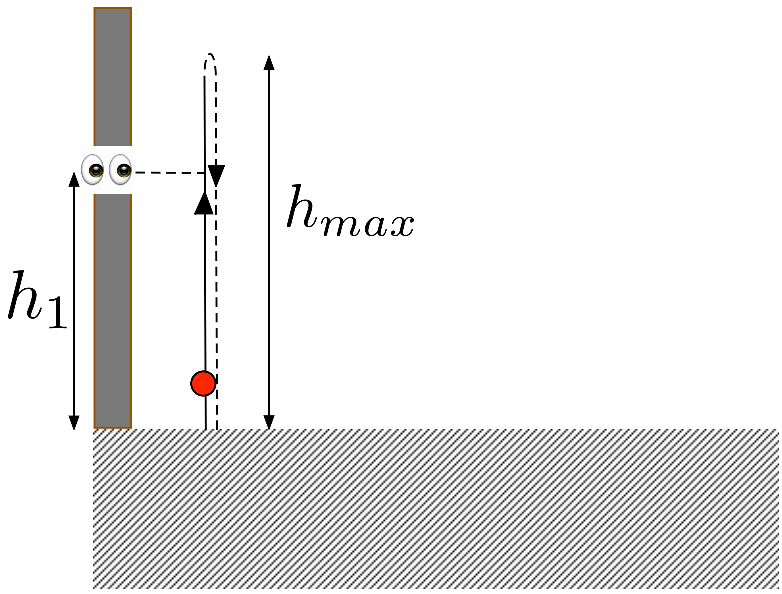
Esercizio (tratto dal Problema 1.14 del Mazzoldi Nuovo)

Una palla viene lanciata verso l'alto con velocità v_0 ignota. Ad un'altezza $h_1 = 3.77\,\mathrm{m}$ un osservatore vede passare la palla. La vede ripassare dopo $t_1 = 1.04\,\mathrm{s}$. Trovare v_0 e l'altezza massima h_{max} raggiunta dalla palla.



SOLUZIONE

DATI INIZIALI

$h_1 = 3.77\,\mathrm{m}$
$t_1 = 1.04\,\mathrm{s}$

1. La legge oraria della palla è quella di un moto uniformemente accelerato (con accelerazione negativa pari a $-g$). Indicando con y la coordinata spaziale lungo la verticale, e tenendo conto che la palla viene lanciata dal suolo, la legge oraria vale

$$y(t) = \underbrace{y_0}_{=0} + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{1}$$

ed è graficamente rappresentata da una parabola in funzione del tempo, con la concavità rivolta verso il basso.

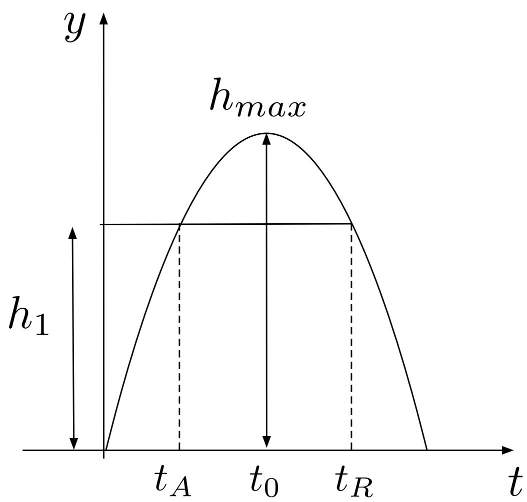


Figure 1: Grafico della legge oraria (1).

2. L'osservatore vede la palla arrivare alla sua altezza quando la coordinata della palla è pari ad h_1. Ciò accade agli istanti t^* che soddisfano

$$\begin{aligned} y(t^*) &= h_1 \\ &\Downarrow \\ v_0 t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} &= h_1 \qquad (2) \\ &\Downarrow \\ g t^{*2} - 2 v_0 t^* + 2h_1 &= 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{cases} t_A^* = \dfrac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh_1}}{g} \\ \\ t_R^* = \dfrac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh_1}}{g} \end{cases} \tag{4}$$

e rappresentano gli istanti a cui osservatore vede la palla nella sua traiettoria di andata (A) e di ritorno (R).

3. La differenza tra i due istanti ci è nota dal testo, e vale t_1. Pertanto

$$\begin{aligned} t_R - t_A &= t_1 \\ &\Downarrow \\ 2\,\frac{\sqrt{v_0^2 - 2gh_1}}{g} &= t_1 \\ &\Downarrow \\ v_0^2 - 2gh_1 &= \frac{g^2 t_1^2}{4} \\ &\Downarrow \\ v_0 &= \sqrt{2gh_1 + \frac{g^2 t_1^2}{4}} \end{aligned} \tag{5}$$

Sostituendo i valori, otteniamo la veloctià di lancio iniziale

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{2 \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 3.77\,\mathrm{m} + \frac{(9.81)^2 \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^4} \cdot (1.04)^2 \mathrm{s}^2}{4}} = \\ &= \sqrt{73.967 \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} + 26.022 \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = \\ &= 10.0\,\mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{6}$$

4. Per determinare l'altezza massima, osserviamo che essa è raggiunta all'istante t_0 che la media tra i due istanti t_A e t_B [vedi Fig.1], ossia

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{t_A + t_R}{2} = \\ & \quad [\text{uso la (4)}] \\ &= \frac{v_0}{g} \end{aligned} \tag{7}$$

L'altezza massima h_{max} è pertanto il valore della coordinata y all'istante t_0:

$$\begin{aligned} h_{max} &= y(t_0) = \\ &= v_0 t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2 = \\ &= v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = \\ &= \frac{v_0^2}{2g} \end{aligned} \tag{8}$$

Sostituendo i valori otteniamo

$$\begin{aligned} h_{max} &= \frac{100\,\frac{\mathrm{m}^{\cancel{2}}}{\cancel{\mathrm{s}^2}}}{2 \cdot 9.81 \frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\cancel{\mathrm{s}^2}}} = \\ &= 5.10\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{9}$$