Esercizio

Un'automobile sfreccia alla velocità costante $v_A = 180\,\mathrm{km/h}$ lungo una strada, passando per un punto di appostamento di una volante della polizia stradale. La volante, dopo un tempo tecnico di $5\,\mathrm{s}$ per il rilevamento della velocità dell'auto, decide di procedere all'inseguimento partendo con un'accelerazione di $3\,\mathrm{m/s^2}$.
I passeggeri dell'auto detengono sotto i sedili un quantitativo illegale di sostanze stupefacenti in polvere. Dopo $2\,\mathrm{min}$ dall'istante in cui la polizia è partita, si accorgono di essere inseguiti e decidono di disfarsi di tali sostanze, iniziando a disperdere la polvere dal finestrino dell'auto. Sapendo che per completare tale operazione sono necessari $10\,\mathrm{s}$, e che la velocità massima che la volante della polizia può raggiungere è di 200 km/h, stabilire se i passeggeri dell'auto si saranno già completamente disfatti delle sostanze stupefacenti quando verranno affiancati dalla volante.

SOLUZIONE

DATI NOTI

$v_A = 180\frac{\text{km}}{\text{h}} = 180 \cdot \frac{1000\,\text{m}}{3600\,\text{s}} = 50\,\text{m/s}$

$v_{max} = 200\frac{\text{km}}{\text{h}} = 200 \cdot \frac{1000\,\text{m}}{3600\,\text{s}} = 55.56\,\text{m/s}$

Scegliamo come origine spaziale $x = 0$ il punto di appostamento della volante della polizia.

Per la scelta dell'origine dei tempi $t = 0$ abbiamo due possibili scelte sensate (equivalenti):

1. *scelta 1:* scegliere come $t = 0$ l'istante in cui la volante della polizia parte dal punto di appostamento. In tal caso,

   (a) l'auto A era sfrecciata per $x = 0$ all'istante $t_0 = -5\,\text{s}$, e segue dunque la legge oraria

   $$x_A(t) = v_A\,(t - t_0) \tag{1}$$

   Pertanto, all'istante $t = 0$ in cui la polizia parte, l'auto si trova

   $$x_A(t = 0) = -v_A\,t_0 = -50\,\frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}}}\,(-5\cancel{\text{s}}) = 250\,\text{m} \tag{2}$$

   (b) la polizia parte dal punto di appostamento all'istante $t = 0$, seguendo una legge oraria

   $$x_P(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,a\,t^2 & \text{se} \quad 0 \le t \le \bar{t} \qquad \text{(fase di accelerazione)} \\ \\ \bar{x}_P + v_{max}(t - \bar{t}) & \text{se} \quad t \ge \bar{t} \qquad \text{(fase di velocità costante = massima)} \end{cases} \tag{3}$$

   dove $\bar{t}$ è l'istante (ancora ignoto) in cui la volante raggiunge la sua velocità massima v_{max}, e $\bar{x}_P = x_P(\bar{t})$ la sua posizione in tale istante.

oppure

2. *scelta 2:* scegliere come $t = 0$ l'istante in cui l'auto A passa davanti al punto di appostamento della polizia. In tal caso,

   (a) l'auto segue una legge oraria data da

   $$x_A(t) = v_A\,t \qquad \forall t \tag{4}$$

   e si ha

   $$x_A(t = 0) = 0\,\text{m} \tag{5}$$

   (b) la polizia parte dal punto di appostamento all'istante $t_0 = 5\,\text{s}$, seguendo una legge oraria

   $$x_P(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \le t \le t_0 \qquad \text{(polizia ancora ferma)} \\ \\ \frac{1}{2}\,a\,(t - t_0)^2 & \text{se} \quad t_0 \le t \le t' \qquad \text{(fase di accelerazione)} \\ \\ x'_P + v_{max}(t - t') & \text{se} \quad t \ge t' \qquad \text{(fase di velocità costante = massima)} \end{cases} \tag{6}$$

   dove t' è l'istante (ancora ignoto) in cui la polizia raggiunge la sua velocità massima v_{max}, e $x'_P = x_P(t')$ la sua posizione in tale istante.

Adottiamo ad esempio la *scelta 1.*

- Calcoliamo anzitutto l'istante $\bar{t}$ in cui la volante della polizia, procedendo con accelerazione a, raggiunge la sua velocità massima. A tale scopo, conviene ricavare la legge oraria della velocità per la volante, ottenuta come derivata $v_P(t) = \frac{dx_P}{dt}$ dalla (3),

$$v_P(t) = \begin{cases} a\,t & \text{se} \quad 0 \leq t \leq \bar{t} \qquad \text{(fase di accelerazione)} \\ \\ v_{max} & \text{se} \quad t \geq \bar{t} \qquad \text{(fase di velocità costante = massima)} \end{cases} \tag{7}$$

Per definizione stessa di $\bar{t}$, avremo

$$\begin{aligned} v(\bar{t}) &= v_{max} \\ &\Downarrow \\ a\,\bar{t} &= v_{max} \\ &\Downarrow \\ \bar{t} &= \frac{v_{max}}{a} \end{aligned} \tag{8}$$

Sostituendo i valori si ottiene

$$\bar{t} \quad = \quad \frac{200\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}{3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \frac{200\,\frac{1000\,\cancel{\text{m}}}{3600\,\text{s}}}{3\,\frac{\cancel{\text{m}}}{\text{s}^2}} = 18.52\,\text{s} \tag{9}$$

- In tale istante $t = \bar{t}$ la volante si trova alla posizione [vedi Eq.(3)]

$$\bar{x}_P = x_P(\bar{t}) = \frac{1}{2}a\bar{t}^2 \tag{10}$$

ossia, sostituendo l'Eq.(8) in (10),

$$\bar{x}_P \quad = \quad \frac{1}{2}a\left(\frac{v_{max}}{a}\right)^2 = \frac{v_{max}^2}{2a} \tag{11}$$

Sostituendo i valori si ottiene

$$\bar{x}_P = x_P(\bar{t}) = \frac{\left(55.56\,\frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}}}\right)^2}{2 \cdot 3\,\frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}^2}}} = 514.40\,\text{m} \tag{12}$$

Sempre a tale istante $t = \bar{t}$, l'auto si trova alla posizione [vedi (1)]

$$x_A(\bar{t}) = v_A\,(\bar{t} - t_0) \tag{13}$$

ossia, sostituendo (8) in (13),

$$x_A(\bar{t}) \quad = \quad 50\,\frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}}}(18.52\cancel{\text{s}} - (-5\cancel{\text{s}})) = 1176\,\text{m} \tag{14}$$

Confrontando (14) e (12), si vede che, quando la volante raggiunge la sua velocità massima, non ha ancora affiancato l'auto, dato che $x_A(\bar{t}) > x_P(\bar{t})$.

- Indichiamo ora con t^* l'istante in cui la volante della polizia affianca l'auto. Allora, per definizione, in tale istante la coordinate spaziali delle due auto coincidono. Pertanto

$$x_A(t^*) = x_P(t^*) \tag{15}$$

dove la legge oraria per l'auto è data dalla (1) e la legge oraria della volante è data dalla (3). NOTA BENE: dato che a regime la velocità massima della volante della polizia è più elevata di quella dell'auto, sappiamo per certo che prima o poi la volante affiancherà l'auto. Dall'analisi precedente, inoltre, sappiamo anche che quando la volante raggiunge la sua v_{max} non avrà ancora affiancato l'auto. Pertanto la volante affiancherà l'auto durante la fase di velocità massima v_{max}. Dunque si ha

$$t^* > \bar{t} \tag{16}$$

Sostituiamo nella (15) la legge oraria (1) per l'auto e (3) per la legge oraria della volante. Tenendo conto che $t^* > \bar{t}$ si ha

$$\begin{aligned}
x_A(t^*) &= x_P(t^*) \\
&\Downarrow \\
v_A(t^* - t_0) &= \bar{x}_P + v_{max}(t^* - \bar{t}) \\
&\Downarrow \\
(v_{max} - v_A)\, t^* &= -v_A\, t_0 - \bar{x}_P + v_{max}\, \bar{t} \\
&\Downarrow \\
t^* &= \frac{v_{max}\, \bar{t} - v_A\, t_0 - \bar{x}_P}{v_{max} - v_A}
\end{aligned} \tag{17}$$

Sostituendo i valori [vedi anche Eq.(9) e (12)] otteniamo

$$\begin{aligned}
t^* &= \frac{55.56\,\frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}}} \cdot 18.52\,\cancel{\mathrm{s}} - 50\,\frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}}} \cdot (-5)\,\cancel{\mathrm{s}} - 514.40\,\mathrm{m}}{55.56\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \\
&= \frac{1028.89\,\cancel{\mathrm{m}} + 250\,\cancel{\mathrm{m}} - 514.40\,\cancel{\mathrm{m}}}{5.56\,\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}}} = \\
&= \frac{764.49}{5.56}\,\mathrm{s} = \\
&= 137.6\,\mathrm{s} \qquad \text{(istante in cui la volante affianca l'auto)}
\end{aligned} \tag{18}$$

- I passeggeri dell'auto hanno iniziato a gettare gli stupefacenti dal finestrino dopo $2\,\mathrm{min} = 120\,\mathrm{s}$ dalla partenza della volante all'istante $t = 0$. Siccome occorrono 10 secondi per terminare l'operazione, si sono liberati completamente degli stupefacenti all'istante

$$t_r = 120\,\mathrm{s} + 10\,\mathrm{s} = 130\,\mathrm{s} \qquad \text{(istante in cui gli stupefacenti sono spariti)} \tag{19}$$

Pertanto i passeggeri dell'auto non vengono colti dalla volante con gli stupefacenti, e subiscono solo un'ammenda per superamento dei limiti di velocità.

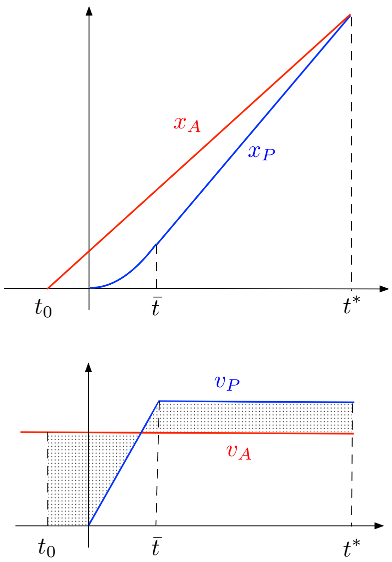

Figure 1: Legge oraria dell'auto e della polizia, e le corrispondenti velocità.