

Esercizio

Un uomo lancia in alto, verticalmente lungo l'asse z , un sasso da un'altezza $h_0 = 2$ m dal suolo, con una velocità di 10 m/s. Il sasso si muove di moto uniformemente accelerato, con un'accelerazione g di modulo $g = 9.81$ m/s², diretta verso il basso.

1. Determinare l'altezza massima z_{max} raggiunta dal sasso;
2. Determinare la velocità v^* di impatto al suolo del sasso, e commentare se è maggiore o minore di quella di lancio;
3. Calcolare l'andamento nel tempo della quantità $E_p = mgz$ (detta 'energia potenziale'), dove m è la massa del sasso e z è l'altezza del sasso dal suolo ad un istante generico; rappresentare graficamente come varia $E_p(t)$ allo scorrere del tempo;
4. Calcolare l'andamento nel tempo della quantità $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ (detta 'energia cinetica'); rappresentare graficamente come varia $E_k(t)$ allo scorrere del tempo;
5. Calcolare e disegnare l'andamento nel tempo della quantità $E_m = E_p + E_k$ (detta 'energia meccanica').

SOLUZIONE

Il moto del sasso avviene lungo l'asse z (orientato verso l'alto). Risulta naturale scegliere come istante iniziale $t = 0$ quello in cui l'uomo lancia il sasso. Dal testo sappiamo che

- il moto è uniformemente accelerato, con accelerazione $-g$ (dove il segno '-' tiene conto del fatto che tale accelerazione è diretta verso il basso);
- l'altezza iniziale da cui parte il sasso è $h_0 = 2$ m;
- la velocità iniziale con cui parte il sasso è $v_0 = 10$ m/s;

Da questi elementi possiamo dedurre che la legge oraria del sasso lungo l'asse z è:

$$z(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1)$$

Conseguentemente, la legge oraria della velocità vale

$$v(t) = \frac{dz}{dt} = v_0 - gt \quad (2)$$

1. La legge oraria (1) descrive come varia l'altezza z del sasso al trascorrere del tempo. Per determinare l'altezza massima che il sasso raggiunge, dobbiamo calcolare il massimo della funzione $z = z(t)$. A tale scopo imponiamo l'annullamento della derivata

$$\frac{dz}{dt} = v(t) = v_0 - gt = 0 \quad (3)$$

Tale condizione è soddisfatta all'istante

$$t_{max} = \frac{v_0}{g} \quad (4)$$

Il valore di tale massimo è dato

$$\begin{aligned} z_{max} &= z(t_{max}) = \\ &= h_0 + v_0 t_{max} - \frac{1}{2}gt_{max}^2 = \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &= h_0 + v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}g \left(\frac{v_0}{g} \right)^2 = \\ &= h_0 + \frac{v_0^2}{2g} \end{aligned} \quad (6)$$

Sostituendo i valori abbiamo

$$\begin{aligned} z_{max} &= 2 \text{ m} + \frac{100 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \\ &= 7.10 \text{ m} \end{aligned} \quad (7)$$

2. Calcoliamo ora l'istante in cui il sasso impatta il suolo. Possiamo procedere in due modi:

- **Primo modo**

Denotiamo tale istante (ignoto) con t^* . Per definizione tale istante è quello per cui si ha

$$\begin{aligned} z(t^*) &= 0 \\ &\Downarrow \\ h_0 + v_0 t^* - \frac{1}{2}gt^{*2} &= 0 \\ &\Downarrow \\ \frac{1}{2}gt^{*2} - v_0 t^{*2} - h_0 &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

che ha due soluzioni

$$\begin{cases} t_1^* = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g} > 0 \\ t_2^* = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g} < 0 \end{cases} \quad (9)$$

Siccome ci interessa solo la soluzione nel futuro (nel passato il sasso non era in moto, ma in mano all'uomo), scartiamo la soluzione t_2^* e teniamo solo la soluzione t_1^* . Quindi

$$t^* = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g} \quad (10)$$

La velocità di impatto al suolo è per definizione la velocità che il sasso possiede all'istante t^* in cui impatta il suolo. E dunque

$$\begin{aligned} v^* &= v(t^*) = v_0 - gt^* = \\ &= v_0 - g \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g} = \\ &= -\sqrt{v_0^2 + 2gh_0} \end{aligned} \quad (11)$$

Osserviamo che è negativa perché chiaramente quando il sasso impatta il suolo la sua velocità è diretta verso il basso. Sostituendo i valori abbiamo

$$\begin{aligned} v^* &= -\sqrt{v_0^2 + 2gh_0} = \\ &= -\sqrt{\frac{100 \text{ m}^2}{\text{s}^2} + 2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 2 \text{ m}} = \\ &= -\sqrt{(100 + 39.24) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \\ &= -11.8 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (12)$$

Osserviamo che v^* è maggiore (in modulo) della velocità di lancio iniziale v_0 .

- **Secondo modo:**

Disegniamo in Fig.1 la legge oraria della velocità, data dall'Eq.(2).

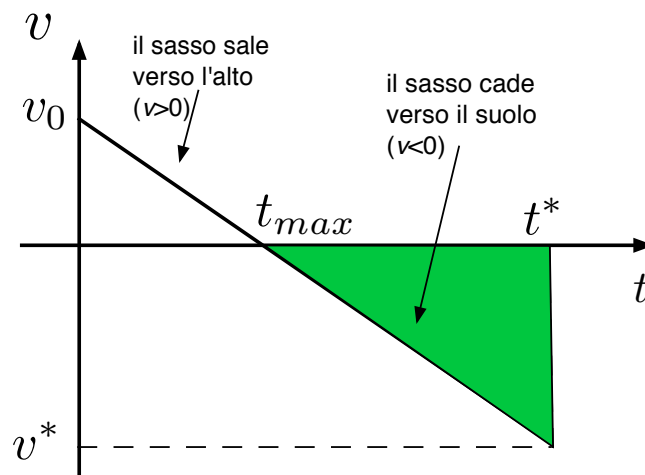


Figure 1: Legge oraria della velocità per il moto del sasso.

Sfruttiamo ora la formula generale

$$\Delta z = z(t_2) - z(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \quad (13)$$

che vale per qualunque coppia di istanti t_1 e t_2 , e la applichiamo al nostro caso. In particolare

- scegliamo come istante t_1 l'istante t_{max} in cui il sasso raggiunge la massima altezza, e dunque $z(t_{max}) = z_{max}$ e $v(t_{max}) = 0$ perché in tale istante la velocità del sasso è per definizione nulla;
- scegliamo come istante t_2 l'istante t^* in cui il sasso impatta il suolo, e dunque $z(t^*) = 0$ e $v(t^*) = v^*$ (incognita);
- pertanto $\Delta z = z(t^*) - z(t_{max}) = 0 \text{ m} - z_{max} = -z_{max}$.

Pertanto abbiamo

$$\begin{aligned} z(t^*) - z(t_{max}) = -z_{max} &= \int_{t_{max}}^{t^*} v(t) dt = \\ &= \text{area triangolo (col segno)} = \frac{\text{base} \times \text{altezza}}{2} \\ &= (t^* - t_{max}) \frac{v^*}{2} \end{aligned} \quad (14)$$

D'altra parte l'accelerazione non è altro che la pendenza della curva $v(t)$, che può scriversi come

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^* - 0 \text{ m/s}}{t^* - t_{max}} \quad \Rightarrow \quad t^* - t_{max} = \frac{v^*}{a} = -\frac{v^*}{g} \quad (15)$$

Sostituendo (15) in (14) abbiamo

$$\begin{aligned} -z_{max} &= -\frac{v^{*2}}{2g} \\ &\Downarrow \\ \Rightarrow v^{*2} &= 2gz_{max} \\ &\Downarrow \\ v^* &= -\sqrt{2gz_{max}} \quad (\text{scegliamo il '-' perché fisicamente dev'essere verso il basso}) \\ &\Downarrow \text{ [uso ora (6)]} \\ v^* &= -\sqrt{2g \left(h_0 + \frac{v_0^2}{2g} \right)} \\ &\Downarrow \\ v^* &= -\sqrt{v_0^2 + 2gh_0} \end{aligned} \quad (16)$$

che coincide con quanto trovato in (11) nel primo modo. E dunque sostituendo i valori

abbiamo nuovamente

$$\begin{aligned}
 v^* &= -\sqrt{v_0^2 + 2gh_0} = \\
 &= -\sqrt{\frac{100 \text{ m}^2}{\text{s}^2} + 2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 2 \text{ m}} = \\
 &= -\sqrt{(100 + 39.24) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \\
 &= -11.8 \text{ m/s}
 \end{aligned} \tag{17}$$

3. Dalla legge oraria (1) di $z(t)$ abbiamo che l'andamento nel tempo della quantità chiamata energia potenziale vale

$$\begin{aligned}
 E_p(t) &= mgz(t) = \\
 &= mg \left(h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \right) = \\
 &= mgh_0 + mgv_0 t - \frac{1}{2}mg^2t^2
 \end{aligned} \tag{18}$$

Il grafico di $E_p(t)$ in funzione del tempo, mostrato in Fig.2 a sinistra, è una parabola rovesciata verso il basso.

4. Dalla legge oraria (2) per la velocità $v(t)$ abbiamo che l'andamento nel tempo della quantità chiamata energia cinetica vale

$$\begin{aligned}
 E_k(t) &= \frac{1}{2}mv^2(t) = \\
 &= \frac{1}{2}m(v_0 - gt)^2 = \\
 &= \frac{1}{2}m(v_0^2 + g^2t^2 - 2v_0gt) = \\
 &= \frac{1}{2}mv_0^2 - mgv_0t + \frac{1}{2}mg^2t^2
 \end{aligned} \tag{19}$$

Il grafico di $E_k(t)$, mostrato in Fig.2 a destra, rappresenta una parabola verso l'alto, che tocca

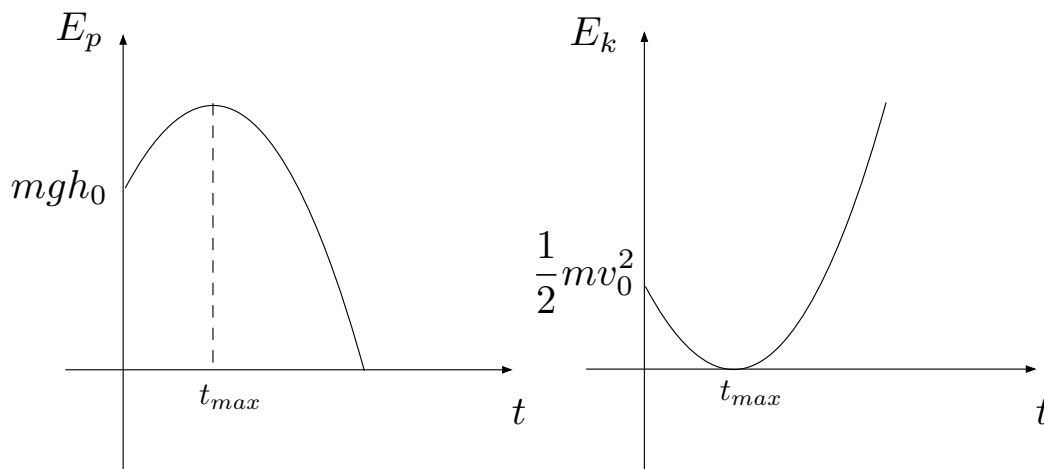


Figure 2: Andamento nel tempo dell'energia potenziale (a sinistra) e dell'energia cinetica (a destra).

l'asse dei tempi all'istante $t = t_{max}$, in cui $v = 0 \Rightarrow E_k = 0$.

5. Calcolando la somma di queste due quantità osserviamo che

$$\begin{aligned}
 E_m(t) &= E_p(t) + E_k(t) = \\
 &= mgh_0 + mgv_0 t - \frac{1}{2}mg^2t^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 - mgv_0 t + \frac{1}{2}mg^2t^2 = \\
 &= mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2
 \end{aligned} \tag{20}$$

non dipende dal tempo. Pertanto, mentre sia l'energia potenziale che l'energia cinetica, separatamente, dipendono dal tempo, la loro somma (energia meccanica) è una costante nel tempo, ossia si conserva.

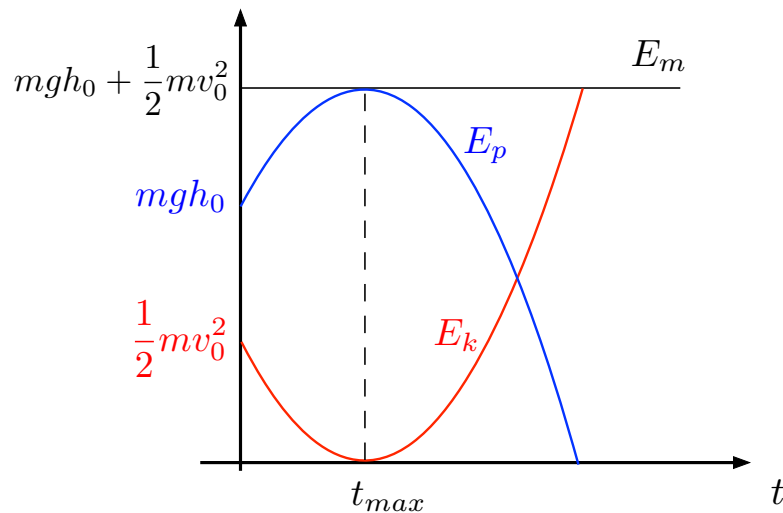


Figure 3: Mentre l'energia potenziale E_p e l'energia cinetica E_k , separatamente, variano nel tempo, la loro somma E_m (energia meccanica) rimane costante nel tempo.