

Esercizio (tratto dal Problema 1.5 del Mazzoldi)

Un punto materiale parte all'istante $t = 0$ con velocità v_0 dall'origine lungo il verso positivo dell'asse x ed è soggetto ad un'accelerazione costante $-a < 0$.

Un secondo punto materiale parte con velocità iniziale nulla all'istante $t = 0$ dalla posizione $x_0 > 0$ e accelera uniformemente con accelerazione a . Determinare:

1. le condizioni per le quali il primo punto può raggiungere il secondo;
2. se e quando avviene l'impatto nel caso specifico $x_0 = 4.5 \text{ m}$, $v_0 = 6 \text{ m/s}$ e $a = 2 \text{ m/s}^2$.

SOLUZIONE

Il moto dei due punti materiali è descritto dalle due leggi orarie:

$$\begin{cases} x_1(t) = v_0 t - \frac{a}{2} t^2 \\ x_2(t) = x_0 + \frac{a}{2} t^2 \end{cases} \quad (1)$$

1. Il primo punto può raggiungere il secondo se esiste un istante t^* tale che le coordinate dei due punti materiali sono uguali

$$x_1(t^*) = x_2(t^*)$$

$$v_0 t^* - \frac{a}{2} t^{*2} = x_0 + \frac{a}{2} t^{*2} \quad (2)$$

$$0 = a t^{*2} - v_0 t^* + x_0 \quad (3)$$

Otteniamo

$$t^* = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4x_0 a}}{2a} \quad (4)$$

Esistono soluzioni (reali) solo se

$$v_0^2 - 4x_0 a \geq 0 \quad (5)$$

Pertanto il primo punto può raggiungere il secondo se e solo se

$$v_0^2 \geq 4x_0 a \quad (6)$$

e l'impatto avviene al primo dei due istanti-soluzione, ossia

$$t^* = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 4x_0 a}}{2a} \quad (7)$$

2. Nel caso specifico $x_0 = 4.5 \text{ m}$, $v_0 = 6 \text{ m/s}$ e $a = 2 \text{ m/s}^2$ l'istante dell'impatto è

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{6 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \sqrt{36 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 4 \cdot 4.5 \text{ m} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}{2 \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \\ &= \frac{6 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \sqrt{36 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 36 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}}{4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \\ &= \frac{6 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1.5 \text{ s} \end{aligned} \quad (8)$$

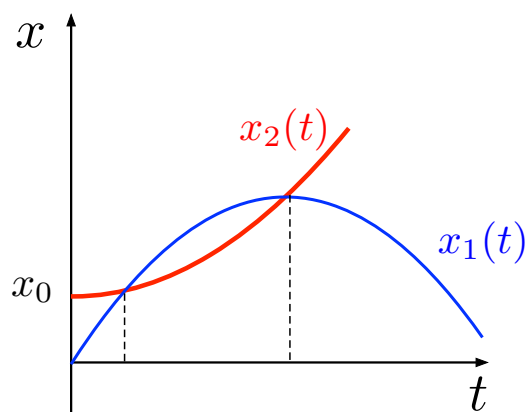


Figure 1: Grafico delle leggi orarie (1) della posizione delle due particelle.