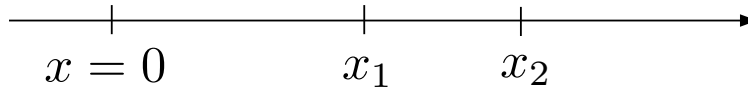


Esercizio (tratto dal Problema 1.4 del Mazzoldi)

Un punto materiale si muove con moto uniformemente accelerato lungo l'asse x . Passa per la posizione x_1 con velocità $v_1 = 1.9 \text{ m/s}$, e per la posizione $x_2 = x_1 + \Delta x$ con velocità $v_2 = 8.2 \text{ m/s}$. Sapendo che $\Delta x = 10 \text{ m}$, calcolare:

1. l'accelerazione;
2. il tempo che il punto impiega a percorrere il tratto Δx .



SOLUZIONE**Dati Noti**

v_1	=	1.9 m/s
v_2	=	8.2 m/s
Δx	=	10 m

Siccome il testo precisa che si tratta di un moto uniformemente accelerato, possiamo applicare le formule relative a questo tipo di moto.

Scegliamo come origine dei tempi ($t = 0$) l'istante in cui il punto materiale passa per la posizione x_1 (e sappiamo che in tale istante ha velocità v_1). Pertanto la legge oraria si scrive come:

$$x(t) = x_1 + v_1 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (1)$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{dx}{dt} = v_1 + a t \quad (2)$$

CHECK: Siccome esistono varie espressioni per la legge oraria di un moto uniformemente accelerato, controlliamo che la formula (1) usata sia corretta. Deve valere che all'istante $t = 0$ il punto materiale si trovi alla posizione x_1 con velocità v_1 , ossia deve valere che $x(t = 0) = x_1$ e che $v(t = 0) = v_1$. Controllando

$$x(t = 0) = x_1 + v_1 \cdot 0 + \frac{1}{2} a \cdot 0^2 = x_1 \quad \text{OK} \quad (3)$$

$$v(t = 0) = v_1 + a \cdot 0 = v_1 \quad \text{OK} \quad (4)$$

Possiamo procedere ora in due modi:

Primo modo:

Utilizziamo l'informazione che il punto materiale passa per x_2 con velocità v_2 . Non sappiamo a quale istante ci passa.

- Indichiamo

t^* = istante in cui il punto materiale passa per x_2

Allora per definizione avremo

$$\begin{cases} x_2 = x(t^*) = x_1 + v_1 t^* + \frac{1}{2} a t^{*2} \\ v_2 = v(t^*) = v_1 + a t^* \end{cases} \quad (5)$$

ossia

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = v_1 t^* + \frac{1}{2} a t^{*2} \\ v_2 - v_1 = a t^* \end{cases} \quad (6)$$

Ricordando che

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \Delta x = v_1 t^* + \frac{1}{2} a t^{*2} \\ v_2 - v_1 = a t^* \end{cases} \quad (7)$$

dove Δx , v_1 e v_2 sono parametri noti dal testo, mentre a e t^* sono due incognite.

- Abbiamo dunque un sistema di due equazioni in due incognite, che possiamo risolvere con semplici passaggi

$$\begin{cases} \Delta x = t^* (v_1 + \frac{1}{2} a t^*) \\ a t^* = v_2 - v_1 \end{cases} \quad (8)$$

Sostituendo la seconda nella prima

$$\begin{cases} \Delta x = t^* (v_1 + \frac{v_2 - v_1}{2}) = t^* \frac{v_2 + v_1}{2} \\ a t^* = v_2 - v_1 \end{cases} \quad (9)$$

da cui

$$\begin{cases} t^* = \frac{\Delta x}{\frac{v_2 + v_1}{2}} \\ a = \frac{v_2 - v_1}{t^*} \end{cases} \quad (10)$$

ossia

$$\begin{cases} t^* = \frac{2\Delta x}{v_2 + v_1} \\ \Rightarrow a = \frac{v_2 - v_1}{\frac{2\Delta x}{v_2 + v_1}} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\Delta x} \end{cases} \quad (11)$$

- Sostituisco (solo ora !) i dati numerici

$$\begin{cases} t^* = \frac{2\Delta x}{v_2 + v_1} = \frac{2 \cdot 10 \text{ m}}{8.2 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 1.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{20}{10.1 \frac{1}{\text{s}}} = 1.98 \text{ s} \\ a = \frac{8.2^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 1.9^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 10 \text{ m}} = \frac{(67.24 - 3.61) \text{ m}}{20 \text{ s}^2} = 3.18 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{cases} \quad (12)$$

Controllo dimensionale: controllo che i risultati ottenuti abbiano la dimensione giusta. In effetti t^* (che deve essere un tempo) risulta avere le dimensioni del s, mentre a (che dev'essere un'accelerazione) risulta avere le dimensioni di m/s^2 .

Secondo modo:

- Ricordiamo che, in generale, disegnando la curva $v(t)$ lo spazio percorso è l'area sottesa da tale grafico (vedi Fig.1) Questo risultato è una conseguenza della definizione stessa

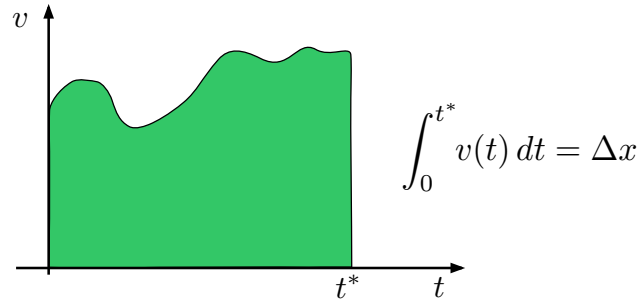


Figure 1:

di derivata

$$\int_0^{t^*} v(t) dt = \int_0^{t^*} \frac{dx}{dt} dt = x(t^*) - x(0) = x_2 - x_1 = \Delta x \quad (13)$$

- Nel nostro caso particolare di moto rettilineo uniformemente accelerato, il grafico di $v(t)$ è una retta, come mostrato in Fig.2, e dunque il grafico da essa sotteso non è nient'altro che un trapezio, la cui area è base x semi-somma delle altezze, ossia

$$\Delta x = t^* \cdot \frac{v_1 + v_2}{2} \quad (14)$$

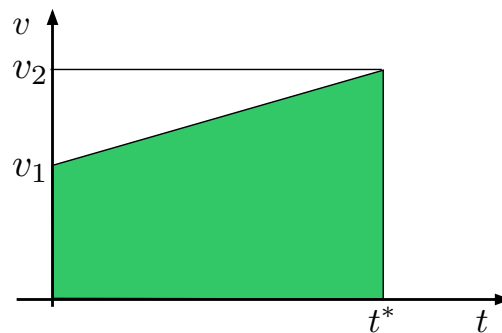


Figure 2:

- D'altra parte, nel grafico $v(t)$, l'accelerazione è proprio la pendenza dell'andamento lineare, che si può scrivere come

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t^*} \quad (15)$$

da cui

$$t^* = \frac{v_2 - v_1}{a} \quad (16)$$

- Combinando (14) e (16) otteniamo

$$\begin{aligned}\Delta x &= t^* \cdot \frac{v_1 + v_2}{2} = \\ &= \frac{v_2 - v_1}{a} \frac{v_1 + v_2}{2} = \\ &= \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}\end{aligned}\quad (17)$$

da cui si ottiene

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\Delta x}\quad (18)$$

che coincide con la prima delle (11).

- Sostituisco (solo ora !) i dati numerici

$$a = \frac{8.2^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 1.9^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 10 \text{ m}} = \frac{(67.24 - 3.61) \text{ m}}{20 \text{ s}^2} = 3.18 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\quad (19)$$

- Dalla (16) abbiamo poi

$$t^* = \frac{v_2 - v_1}{a} = \frac{8.2 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 1.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3.18 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1.98 \text{ s}\quad (20)$$

$$(21)$$

$$(22)$$

che coincide con la seconda delle (11).

Commento: La seconda formula ottenuta in (11)

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\Delta x}\quad (23)$$

è una delle note formule del moto rettilineo uniformemente accelerato

- Quando si usa una formula occorre ricordarsi le condizioni in cui tale formula vale: la (23) non vale per qualsiasi moto, ma solo per uno uniformemente accelerato.
- supponiamo di non ricordare se la formula corretta sia

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\Delta x} \quad \text{oppure} \quad a = \frac{v_2 - v_1}{2\Delta x} \quad ?$$

Possiamo ritrovare la formula giusta tramite il controllo dimensionale. E' infatti facile vedere che la seconda formula è dimensionalmente sbagliata (e pertanto priva di senso), e dunque quella corretta è la prima.