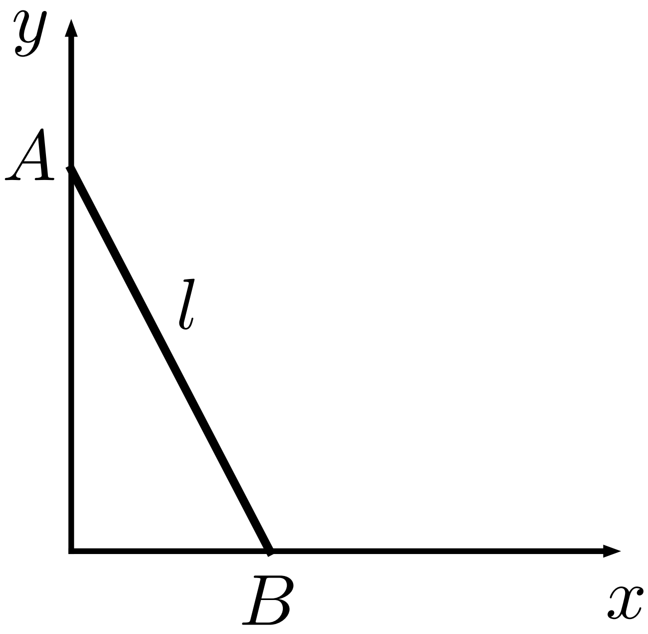
Esercizio (tratto dal Problema 1.9 del Mazzoldi)

Su un piano orizzontale sono poste due guide lisce perpendicolari tra loro, lungo le quali possono scorrere gli estremi di un'asta AB, lunga $l = 1\,\mathrm{m}$. All'istante $t = 0$ l'asta è posta lungo l'asse y. Determinare il modulo della velocità dell'estremo A e il modulo dell'accelerazione dell'estremo A quando B raggiunge la posizione $x_B^* = 0.3\,\mathrm{m}$, nei seguenti due casi

1. l'estremo B viene mantenuto in moto uniforme con velocità costante $v_B = 0.1\,\mathrm{m/s}$;

2. l'estremo B si muove secondo la seguente legge oraria $x_B(t) = l\sin(\omega t)$ con $\omega = 2\,\mathrm{s}^{-1}$.



SOLUZIONE
Siccome l'asta ha una lunghezza l fissa (che non può variare nel tempo), ad ogni generico istante le coordinate x_B e y_A sono tra loro legate dalla relazione

$$l = \sqrt{x_B^2(t) + y_A^2(t)} \qquad \forall t$$

Pertanto la legge oraria del punto A è

$$y_A(t) = \sqrt{l^2 - x_B^2(t)} \tag{1}$$

(stiamo assumendo che y_A possa assumere solo valori positivi), e dunque la sua velocità è

$$\begin{aligned} v_A(t) &= \frac{dy_A}{dt} = \\ &= \frac{d}{dt}\sqrt{l^2 - x_B^2(t)} = \\ &= -\frac{x_B(t)}{\sqrt{l^2 - x_B^2(t)}}\frac{dx_B}{dt} \end{aligned} \tag{2}$$

e l'accelerazione

$$\begin{aligned} a_A(t) &= \frac{d^2y_A}{dt^2} = \\ &= \frac{dv_A}{dt} = \\ &= -\frac{d}{dt}\left(\frac{x_B(t)}{\sqrt{l^2 - x_B^2(t)}}\frac{dx_B}{dt}\right) = \\ &= -\frac{d}{dt}\left(\frac{x_B(t)}{\sqrt{l^2 - x_B^2(t)}}\right)\frac{dx_B}{dt} - \frac{x_B(t)}{\sqrt{l^2 - x_B^2(t)}}\frac{d^2x_B}{dt^2} = \\ &= -\frac{\frac{dx_B}{dt}\sqrt{l^2 - x_B^2(t)} + \frac{x_B^2(t)}{\sqrt{l^2 - x_B^2(t)}}\frac{dx_B}{dt}}{l^2 - x_B^2(t)}\frac{dx_B}{dt} - \frac{x_B(t)}{\sqrt{l^2 - x_B^2(t)}}\frac{d^2x_B}{dt^2} = \\ &= -\left(\frac{dx_B}{dt}\right)^2\frac{l^2}{(l^2 - x_B^2(t))^{3/2}} - \frac{x_B(t)}{\sqrt{l^2 - x_B^2(t)}}\frac{d^2x_B}{dt^2} \end{aligned} \tag{3}$$

1. Nel primo caso il punto B si muove di moto uniforme, e dunque

$$\begin{cases} x_B(t) = v_B t \\ \dfrac{dx_B}{dt} = v_B \\ \dfrac{d^2x_B}{dt^2} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

   Sostituendo (4) in (1), (2) e (3) si ottiene

$$y_A(t) = \sqrt{l^2 - v_B^2 t^2} \tag{5}$$

$$v_A(t) = -\frac{v_B t}{\sqrt{l^2 - v_B^2 t^2}}v_B \tag{6}$$

$$a_A(t) = -v_B^2\frac{l^2}{(l^2 - v_B^2 t^2)^{3/2}} \tag{7}$$

Il punto B raggiunge la posizione

$$x_B^* = 0.3\,\mathrm{m}$$

all'istante

$$t^* = \frac{x_B^*}{v_B} \tag{8}$$

Sostituendo in (6) otteniamo

$$\begin{aligned} v_A^* = v_A(t^*) &= -\frac{v_B t^*}{\sqrt{l^2 - v_B^2 t^{*2}}}\, v_B = \\ &= -\frac{x_B^*}{\sqrt{l^2 - {x_B^*}^2}}\, v_B = \\ &= -\frac{0.3\,\mathrm{m}}{\sqrt{1\mathrm{m}^2 - (0.3\mathrm{m})^2}}\, 0.1\mathrm{m/s} = \\ &= 3.14 \cdot 10^{-2}\mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{9}$$

(10)

Sostituendo in (7) otteniamo

$$\begin{aligned} a_A^* = a_A(t^*) &= -v_B^2 \frac{l^2}{(l^2 - v_B^2 t^{*2})^{3/2}} = \\ &= -v_B^2 \frac{l^2}{(l^2 - {x_B^*}^2)^{3/2}} = \\ &= -(0.1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 \frac{1\mathrm{m}^2}{(1\mathrm{m}^2 - (0.3\mathrm{m})^2)^{3/2}} = \\ &= -0.01\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{m}^3(1 - (0.3)^2)^{3/2}} = \\ &= -1.15 \cdot 10^{-2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned} \tag{11}$$

2. Nel secondo caso il punto B si muove di moto oscillatorio, e dunque

$$\left\{ \begin{aligned} x_B(t) &= l\sin(\omega t) \\ \frac{dx_B}{dt} &= \omega l\cos(\omega t) \\ \frac{d^2x_B}{dt^2} &= -\omega^2 l\sin(\omega t) \end{aligned} \right. \tag{12}$$

Sostituendo (12) in (1) abbiamo

$$\begin{aligned} y_A(t) &= \sqrt{l^2 - l^2\sin^2(\omega t)} = \\ &= l\,|\cos(\omega t)| \end{aligned} \tag{13}$$

Sostituendo (12) in (2) si ottiene

$$\begin{aligned} v_A(t) &= -\frac{l\sin(\omega t)}{\sqrt{l^2 - l^2\sin^2(\omega t)}}\,\omega l\cos(\omega t) = \\ &= -\frac{l\sin(\omega t)}{l|\cos(\omega t)|}\,\omega l\cos(\omega t) = \\ &= -\omega l\frac{\sin(\omega t)\cos(\omega t)}{|\cos(\omega t)|} \end{aligned} \tag{14}$$

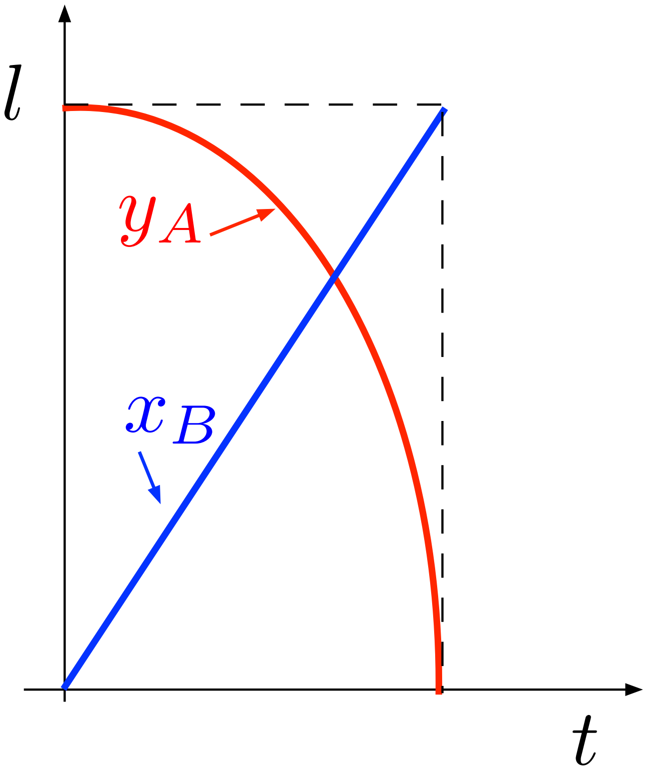


Figure 1: La legge oraria $x_B(t)$ e $y_A(t)$ nel caso in cui x_B si muove di moto rettilineo uniforme $x_B(t) = v_B t$

e infine, sostituendo (12) in (3),

$$\begin{aligned}
a_A(t) &= -\omega^2 l^2 \cos^2(\omega t)\frac{l^2}{(l^2 - l^2\sin^2(\omega t))^{3/2}} + \frac{l\sin(\omega t)}{\sqrt{l^2 - l^2\sin^2(\omega t)}}\omega^2 l \sin(\omega t) = \\
&= -\omega^2 l \cos^2(\omega t)\frac{1}{|\cos(\omega t)|^3} + \frac{\sin(\omega t)}{|\cos(\omega t)|}\omega^2 l \sin(\omega t) = \\
&= \omega^2 l \left(-\cos^2(\omega t)\frac{1}{|\cos(\omega t)|^3} + \frac{\sin^2(\omega t)}{|\cos(\omega t)|}\right) = \\
&= \omega^2 l \left(\frac{\sin^2(\omega t) - 1}{|\cos(\omega t)|}\right) = \\
&= -\omega^2 l\,|\cos(\omega t)| \qquad \text{if } \cos(\omega t) \neq 0 \qquad (15)
\end{aligned}$$

Il punto B raggiunge la posizione

$$x_B^* = 0.3\,\mathrm{m}$$

all'istante dato da

$$\sin(\omega t^*) = \frac{x_B^*}{l} \qquad \Rightarrow \qquad |\cos(\omega t^*)| = \sqrt{1 - (x_B^*/l)^2} \qquad (16)$$

e dunque sostituendo in (14) si ottiene

$$\begin{aligned}
|v_A^*| &= \omega l |\sin(\omega t^*)| = \\
&= \omega\, x_B^* = \\
&= \frac{2}{\mathrm{s}}\, 0.3\,\mathrm{m} = 0.6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad (17)
\end{aligned}$$

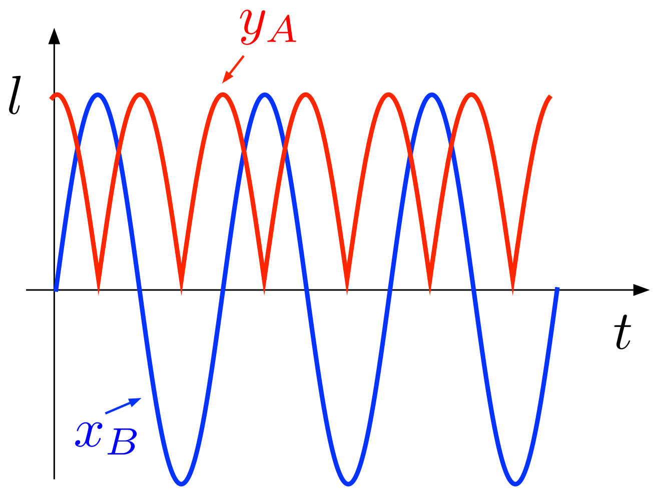


Figure 2: La legge oraria $x_B(t)$ e $y_A(t)$ nel caso in cui x_B si muove di moto oscillatorio $x_B(t) = l\,\sin(\omega t)$

e per l'accelerazione, sostituendo in (15)

$$\begin{aligned} a_A(t) &= -\omega^2 l\,|\cos(\omega t^*)| = \\ &= -\omega^2 l\,\sqrt{1-(x^*_B/l)^2} = \\ &= -\frac{4}{\mathrm{s}^2}\,1\,\mathrm{m}\,\sqrt{1-(0.3)^2} = \\ &= -3.82\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned} \tag{18}$$