

Esercizio

Una particella si muove lungo l'asse x con una velocità descritta dalla seguente legge oraria

$$v(t) = A \frac{t(2 - t/\tau)}{t^2 + \tau^2} \quad (1)$$

dove A e τ sono delle costanti positive.

1. Determinare le unità di misura di A e τ .

All'istante $t = \tau$ la particella parte dalla posizione $x = 1$ m. In seguito si osserva che, all'istante in cui la velocità si annulla, la particella si trova alla posizione $x = 3$ m.

2. Disegnare l'andamento della curva $v(t)$;
3. Determinare il valore della costante A ;
4. Determinare dove si trova la particella all'istante $t = 3\tau$.

SOLUZIONE

1. • Per determinare l'unità di misura di τ osserviamo che, al numeratore dell'equazione (1), appare la combinazione

$$(2 - t/\tau)$$

da cui si vede che il rapporto t/τ deve essere un numero puro (perché è sottratto ad un numero puro). Pertanto τ ha le stesse dimensioni di t :

$$[\tau] = \text{s} \quad (2)$$

- Per determinare l'unità di misura di A abbiamo

$$\begin{aligned} [v] &= [A] \frac{[t] [(2 - t/\tau)]}{[t^2 + \tau^2]} = \\ &= [A] \frac{[t] \cdot 1}{[t]^2} = \\ &= \frac{[A]}{[t]} \end{aligned} \quad (3)$$

da cui

$$[A] = [v][t] = \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{s} = \text{m} \quad (4)$$

2. Per disegnare l'andamento della velocità in funzione del tempo osserviamo che

- Per $t \rightarrow 0$ abbiamo $v(t) \sim (2A/\tau^2) t$ (andamento lineare in t);
- Per $t = 2\tau$ abbiamo $v = 0$;
- Per $t \rightarrow \pm\infty$ abbiamo $v(t) \rightarrow -A/\tau$;
- Cerchiamo gli istanti di velocità massima e minima attraverso la relazione:

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad (5)$$

Dopo un po' di algebra otteniamo

$$\frac{dv}{dt} = -2A \frac{t^2 + t\tau - \tau^2}{(t^2 + \tau^2)^2} = 0 \quad (6)$$

che ha due soluzioni

$$\begin{cases} t = \tau \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \simeq -1.62\tau < 0 \\ t = \tau \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \simeq +0.62\tau > 0 \end{cases} \quad (7)$$

da cui deduciamo che la derivata si annulla in due soli istanti, uno nel futuro ed uno nel passato.

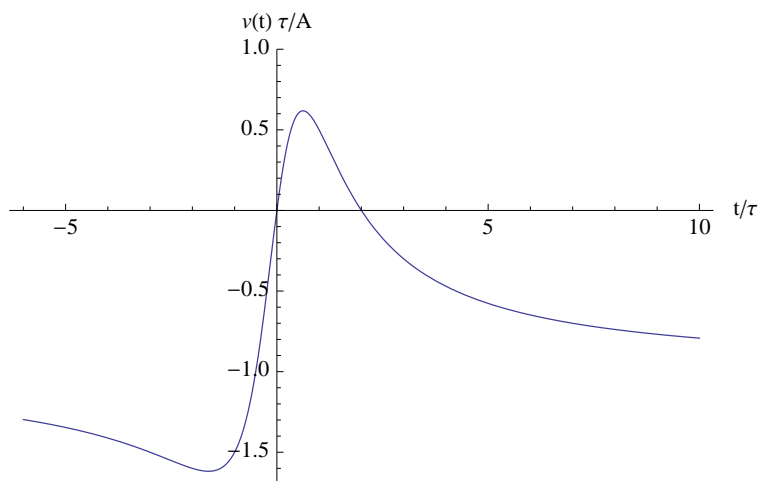


Figure 1: Andamento della legge oraria $v(t)$ della velocità [Eq.(1)].

In virtù di queste considerazioni, possiamo ora tracciare il grafico di $v(t)$, mostrato in Fig.1.

3. Ci sono due istanti per cui conosciamo la posizione della particella:

- Uno è l'istante $t = \tau$:

$$x(t = \tau) = 1 \text{ m} \quad (8)$$

- L'altro istante è quello in cui si annulla la velocità, ossia

$$v(t) = A \frac{t(2 - t/\tau)}{t^2 + \tau^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2\tau$$

E dal testo sappiamo che

$$x(t = 2\tau) = 3 \text{ m} \quad (9)$$

- Possiamo ora applicare il teorema generale

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = x(t_2) - x(t_1) \quad (10)$$

al caso particolare in cui $t_1 = \tau$, $t_2 = 2\tau$ e $v(t)$ è data dalla (1). Otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{2\tau} v(t) dt &= x(2\tau) - x(\tau) \\ &\Downarrow \\ \int_{\tau}^{2\tau} A \frac{t(2 - t/\tau)}{t^2 + \tau^2} dt &= 3 \text{ m} - 1 \text{ m} \end{aligned} \quad (11)$$

Per calcolare l'integrale al membro sinistro osserviamo che

$$\begin{aligned}
 \int_{\tau}^{2\tau} A \frac{t(2-t/\tau)}{t^2+\tau^2} dt &= A \int_{\tau}^{2\tau} \left(\frac{2t}{t^2+\tau^2} - \frac{1}{\tau} \frac{t^2}{t^2+\tau^2} \right) dt = \\
 &= A \int_{\tau}^{2\tau} \left(\frac{2t}{t^2+\tau^2} - \frac{1}{\tau} \left(1 - \frac{\tau^2}{t^2+\tau^2} \right) \right) dt = \\
 &= A \int_{\tau}^{2\tau} \left(\frac{2t}{t^2+\tau^2} - \frac{1}{\tau} + \frac{\tau}{t^2+\tau^2} \right) dt = \\
 &= A \left[\ln(t^2+\tau^2) - \frac{t}{\tau} + \arctan \frac{t}{\tau} \right]_{t=\tau}^{t=2\tau} = \quad (12) \\
 &= A \left(\ln(5\tau^2) - 2 + \arctan 2 - \ln(2\tau^2) + 1 - \underbrace{\arctan 1}_{=\pi/4} \right) = \\
 &= A \left(\ln \frac{5}{2} - 1 + \arctan 2 - \pi/4 \right) \quad (13)
 \end{aligned}$$

Sostituendo (13) in (11) si ottiene

$$A \left(\ln \frac{5}{2} - 1 + \arctan 2 - \pi/4 \right) = 2m \quad (14)$$

da cui

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{2m}{\ln \frac{5}{2} - 1 + \arctan 2 - \pi/4} = \\
 &= \frac{2m}{0.238} = \\
 &= 8.40m \quad (15)
 \end{aligned}$$

4. Ora che la costante A è stata determinata, conosciamo esplicitamente la legge oraria della velocità. Per determinare la posizione della particella all'istante $t = 3\tau$ possiamo allora applicare nuovamente il teorema (10). Questa volta, però, lo utilizziamo tra gli istanti $t = \tau$ (in cui la posizione della particella è nota) e l'istante $t = 3\tau$ (in cui vogliamo determinare la posizione). Avremo

$$\begin{aligned}
 \int_{\tau}^{3\tau} v(t) dt &= x(3\tau) - x(\tau) \\
 \Downarrow \\
 x(3\tau) &= x(\tau) + \int_{\tau}^{3\tau} v(t) dt \\
 \Downarrow \\
 x(3\tau) &= x(\tau) + A \int_{\tau}^{3\tau} \frac{t(2-t/\tau)}{t^2+\tau^2} dt \quad (16)
 \end{aligned}$$

La primitiva della funzione integranda è stata determinata in (12), e dunque possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
 x(3\tau) &= \underbrace{x(\tau)}_{=1 \text{ m}} + \underbrace{A}_{=8.40 \text{ m}} \left[\ln(t^2 + \tau^2) - \frac{t}{\tau} + \arctan \frac{t}{\tau} \right]_{t=\tau}^{t=3\tau} = \\
 &= 1 \text{ m} + 8.40 \text{ m} \left(\ln(10\tau^2) - 3 + \arctan 3 - \ln(2\tau^2) + 1 - \underbrace{\arctan 1}_{=\pi/4} \right) = \\
 &= 1 \text{ m} + 8.40 \text{ m} \underbrace{(\ln 5 - 2 + \arctan 3 - \pi/4)}_{=0.073} = \\
 &= 1.61 \text{ m}
 \end{aligned} \tag{17}$$