Esercizio

Una particella si muove lungo l'asse x seguendo la seguente legge oraria

$$x(t) = A \ln\left(1 + \left(\frac{t}{\tau}\right)^2\right) \tag{1}$$

con $A = 1\,\mathrm{m}$, e $\tau = 1\,\mathrm{s}$.

1. Disegnare il grafico della legge oraria;
2. Determinare la posizione della particella agli istanti $t = 0$, $t = \tau$ e $t = 2\tau$;
3. Calcolare la velocità media negli intervalli $t \in [0; \tau]$ e $t \in [\tau; 2\tau]$;
4. Calcolare la velocità istantanea agli istanti $t = \tau/2$ e $t = 3\tau/2$;
5. Determinare in quale istante la particella raggiunge la posizione $x^* = 3\,\mathrm{m}$;
6. Calcolare la velocità massima della particella e in quale istante tale velocità viene raggiunta;

SOLUZIONE

1. Per disegnare il grafico della legge oraria, notiamo che

$$i)\, t \ll \tau \qquad A\,\ln\left(1+\underbrace{\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}_{\ll 1}\right) \simeq A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 \tag{2}$$

$$ii)\, t \gg \tau \qquad A\,\ln\left(1+\underbrace{\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}_{\gg 1}\right) \simeq 2A\,\ln\frac{t}{\tau} \tag{3}$$

e si ottiene il grafico in Fig.1

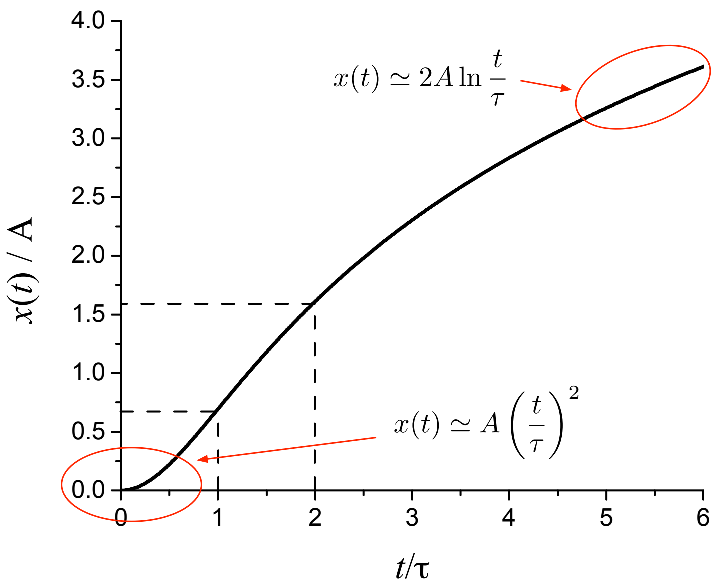

Figure 1: Andamento della legge oraria $x(t)$ [Eq.(1)]

2. Inserendo i tre valori $t = 0$, $t = \tau$, e $t = 2\tau$ nella legge oraria, otteniamo

$$x(t=0) \;=\; A\,\ln\left(1+\left(\frac{0}{\tau}\right)^2\right) = A\cdot 0 = 0\,\mathrm{m} \tag{4}$$

$$x(t=\tau) \qquad A\,\ln\left(1+\left(\frac{\tau}{\tau}\right)^2\right) = A\,\ln 2 = 1\,\mathrm{m}\cdot 0.69 = 0.69\,\mathrm{m} \tag{5}$$

$$x(t=2\tau) \qquad A\,\ln\left(1+\left(\frac{2\tau}{\tau}\right)^2\right) = A\,\ln 5 = 1\,\mathrm{m}\cdot 1.61 = 1.61\,\mathrm{m} \tag{6}$$

3. • La velocità media nell'intervallo $t \in [0;\tau]$ è data per definizione da

$$\begin{aligned}
\bar{v}_{[0;\tau]} &= \frac{x(\tau)-x(0)}{\tau-0} = \\
& \quad [\text{uso (4) e (5)}] \\
&= \frac{A\ln 2 - 0}{\tau} = \\
&= \frac{0.69\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} = 0.69\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad (7)
\end{aligned}$$

• La velocità media nell'intervallo $t \in [\tau;2\tau]$ è data per definizione da

$$\begin{aligned}
\bar{v}_{[\tau;2\tau]} &= \frac{x(2\tau)-x(\tau)}{2\tau-\tau} = \\
& \quad [\text{uso (5) e (6)}] \\
&= \frac{A\ln 5 - A\ln 2}{\tau} = \\
&= \frac{A}{\tau}\ln\frac{5}{2} = \\
&= \frac{1\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}}\cdot 0.916 = \\
&= 0.916\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad (8)
\end{aligned}$$

4. La velocità istantanea ad un generico istante si ottiene per definizione come derivata temporale della legge oraria (1)

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\cdot\frac{2\frac{t}{\tau^2}}{1+\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \qquad (9)$$

ossia

$$v(t) = 2A\cdot\frac{t}{t^2+\tau^2} \qquad (10)$$

ed è riportata in Fig.2.

Pertanto, inserendo in (10) gli istanti $t=\tau/2$ e $t=3\tau/2$, si ottiene

$$\begin{aligned}
v(t=\frac{\tau}{2}) &= 2A\cdot\frac{\frac{\tau}{2}}{\left(\frac{\tau}{2}\right)^2+\tau^2} = \frac{4}{5}\,\frac{A}{\tau} \qquad (11)\\
v(t=\frac{3\tau}{2}) &= 2A\cdot\frac{\frac{3\tau}{2}}{\left(\frac{3\tau}{2}\right)^2+\tau^2} = \frac{12}{13}\,\frac{A}{\tau} \qquad (12)
\end{aligned}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned}
v(t=\frac{\tau}{2}) &= \frac{4}{5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0.80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad (13)\\
v(t=\frac{3\tau}{2}) &= \frac{12}{13}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0.92\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad (14)
\end{aligned}$$

NOTA BENE:
L'istante $t = \tau/2$ si trova esattamente al centro dell'intervallo temporale $t \in [0; \tau]$ su cui in precedenza abbiamo valutato la velocità media (7). Confrontando la velocità media nell'intervallo [Eq. (7)] con la velocità istantanea al centro dell'intervallo [Eq.(13)] notiamo che la velocità media sottostima di circa il 14% la velocità istantanea in $t = \tau/2$. Analogamente, l'istante $t = 3\tau/2$ si trova esattamente al centro dell'intervallo temporale $t \in [\tau; 2\tau]$ su cui in precedenza abbiamo valutato la velocità media (8). Confrontando la velocità media nell'intervallo [Eq. (8)] con la velocità istantanea al centro dell'intervallo [Eq.(14)], notiamo che in questo caso la velocità media sottostima del solo 0.4% la velocità istantanea in $t = 3\tau/2$.

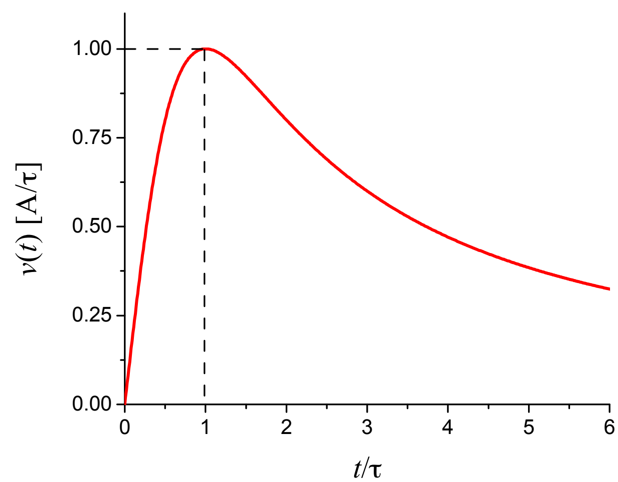

Figure 2: Andamento della legge oraria della velocità $v(t)$ [Eq.(10)]

5. Denotiamo con t^* l'istante (ancora incognito) in cui la particella raggiunge la posizione x^*. Allora per definizione

$$\begin{aligned} x(t^*) &= x^* \\ &\Downarrow \\ A \ln\left(1+\left(\frac{t^*}{\tau}\right)^2\right) &= x^* \\ &\Downarrow \\ \ln\left(1+\left(\frac{t^*}{\tau}\right)^2\right) &= \frac{x^*}{A} \\ &\Downarrow \\ 1+\left(\frac{t^*}{\tau}\right)^2 &= e^{\frac{x^*}{A}} \\ &\Downarrow \\ \frac{t^*}{\tau} &= \sqrt{e^{\frac{x^*}{A}}-1} \\ &\Downarrow \\ t^* &= \tau\sqrt{e^{\frac{x^*}{A}}-1} \qquad (15) \end{aligned}$$

Sostituendo il valore $x^* = 3\,\mathrm{m}$, si ottiene

$$t^* = 1\,\mathrm{s}\sqrt{e^{\frac{3\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m}}}-1} = \sqrt{e^3-1}\,\mathrm{s} = 4.37\,\mathrm{s} \qquad (16)$$

6. Per stabilire la velocità massima della particella dobbiamo valutare il valore massimo della legge oraria della velocità (10). Annullandone la derivata (ossia valutando dove si annulla l'accelerazione) si ottiene

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 2A\left(\frac{t^2+\tau^2 \ -2t^2}{(t^2+\tau^2)^2}\right) = 2A\,\frac{t^2-\tau^2}{(t^2+\tau^2)^2} = 0 \qquad (17)$$

che ha come solutione (positiva)

$$t_{max} = \tau \qquad \text{(istante in cui raggiunge la velocità massima)} \qquad (18)$$

Il valore v_{max} di tale velocità massima si ottiene sostituendo $t = t_{max}$ nella legge oraria della velocità (10). Si ottiene

$$v_{max} = v(t_{max}) = 2A \cdot \frac{t_{max}}{t_{max}^2+\tau^2} = 2A \cdot \frac{\tau}{\tau^2+\tau^2} = \frac{A}{\tau} = \frac{1\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} \qquad (19)$$