Esercizio

Una particella si muove lungo l'asse x seguendo la seguente legge oraria

$$x(t) = A\,\sin(\omega t)\,e^{-\gamma t} \tag{1}$$

dove A, ω e γ sono delle costanti.

1. Determinare le unità di misura delle costanti A, ω e γ.

Si supponga ora che $A = 2\,\mathrm{m}$, e che ω e γ siano legate dalla relazione $\gamma = \omega/2$.

2. Disegnare il grafico della legge oraria;
3. Determinare in quali istanti la particella si trova nell'origine $x = 0$;
4. Determinare in quale istante t_d la particella mostra lo scostamento massimo a destra dell'origine e calcolare tale scostamento massimo $x_{max,d} > 0$;
5. Determinare in quale istante t_s la particella mostra lo scostamento massimo a sinistra dell'origine e calcolare tale scostamento massimo $x_{max,s} < 0$;
6. Calcolare il rapporto $|x_{max,s}|/|x_{max,d}|$.

SOLUZIONE

1. Per determinare le dimensioni delle varie costanti osserviamo che:
   -Siccome l'argomento ωt del $\sin(\omega t)$ deve essere necessariamente adimensionale, abbiamo
   $$1 = [\omega\, t] = [\omega]\, [t] = [\omega]\, \mathrm{s} \qquad \Rightarrow \qquad [\omega] = \mathrm{s}^{-1}$$
   -Siccome l'argomento γt dell'esponenziale $e^{-\gamma t}$ deve essere necessariamente adimensionale, abbiamo
   $$1 = [\gamma\, t] = [\gamma]\, [t] = [\gamma]\, \mathrm{s} \qquad \Rightarrow \qquad [\gamma] = \mathrm{s}^{-1}$$
   -Siccome $x(t)$ rappresenta una coordinata spaziale, la sua unità di misura sono i m, pertanto
   $$[A] = \mathrm{m}$$

2. Per disegnare il grafico osserviamo che la legge oraria $x(t)$ è il prodotto di due funzioni, una sinusoidale $A\sin(\omega t)$ di ampiezza costante pari ad A, ed un'esponenziale $e^{-\gamma t}$ che decade su una scala di tempi caratteristica γ^{-1}, come mostrato in Fig.1.

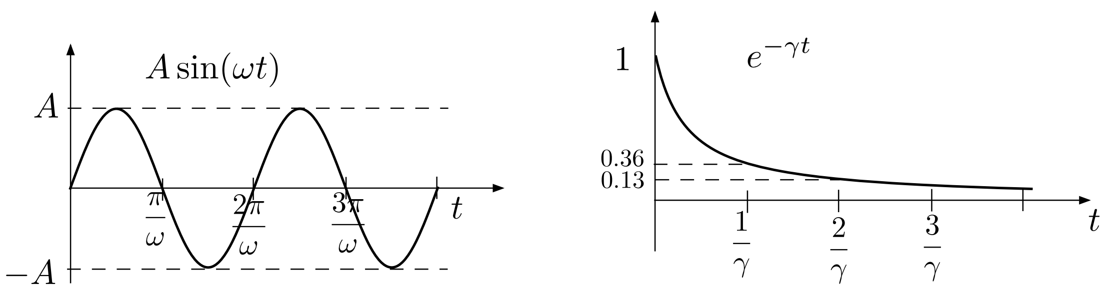

Figure 1: Grafico di $\sin(\omega t)$ e di $e^{-\gamma t}$.

Pertanto il loro prodotto sarà una legge sinusoidale con ampiezza che decade nel tempo.

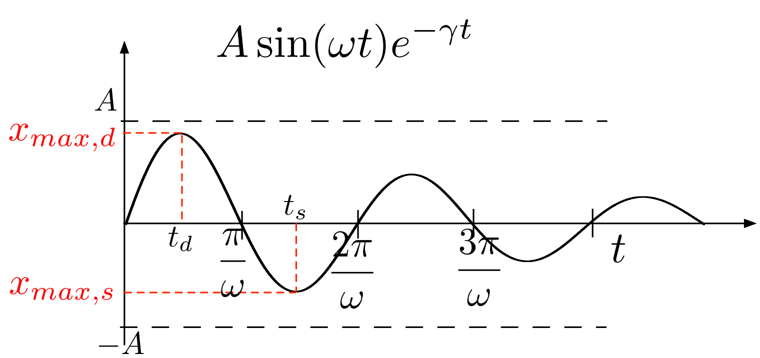

Figure 2: Grafico della legge oraria (1). La particella oscilla attorno all'origine, e l'ampiezza delle oscillazioni si smorza nel tempo.

3. Per determinare gli istanti in cui la particella torna nell'origine $x = 0$, dobbiamo determinare gli istanti t per i quali la coordinata x si annulla. Tali istanti sono dunque dati dalle soluzioni dell'equazione

$$
\begin{array}{rcl}
x(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A\,\sin(\omega t)\,e^{-\gamma t} & = & 0 \\
& \Downarrow & [\text{osserviamo che } e^{-\gamma t} > 0] \\
\sin(\omega t) & = & 0 \\
& \Downarrow & \\
\omega t_n & = & \pi n \qquad n = 0, 1, 2, .. \\
& \Downarrow & \\
t_n & = & \dfrac{\pi n}{\omega}
\end{array}
\tag{2}
$$

(3)

Gli istanti t_n sono quelli in cui la particella torna nell'origine.

4. Dal grafico osserviamo che lo scostamento massimo verso destra coincide con il primo massimo (gli altri massimi sono infatti più piccoli), mentre lo scostamento massimo verso sinistra coincide con il primo minimo (gli altri minimi sono infatti più piccoli in valore assoluto). Quindi dobbiamo trovare i punti estremali della funzione $x(t)$, risolvendo

$$
\begin{array}{rcl}
\dfrac{dx}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dfrac{d}{dt}\left(A\,\sin(\omega t)\,e^{-\gamma t}\right) & = & 0 \\
& \Downarrow & \\
A\omega\cos(\omega t)\,e^{-\gamma t} - A\gamma\sin(\omega t)\,e^{-\gamma t} & = & 0 \\
& \Downarrow & \\
\omega\cos(\omega t) & = & \gamma\sin(\omega t) \\
& \Downarrow & \\
\tan(\omega t) & = & \dfrac{\omega}{\gamma} \\
& \Downarrow & \\
\omega t_n & = & \arctan(\dfrac{\omega}{\gamma}) + \pi n \\
& \Downarrow & \\
t_n & = & \dfrac{1}{\omega}\left(\arctan(\dfrac{\omega}{\gamma}) + \pi n\right) \qquad n = 0, 1, 2, ..
\end{array}
\tag{4}
$$

In particolare l'istante in cui viene raggiunto il massimo scostamento verso destra vale

$$n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_d = t_{n=0} = \frac{1}{\omega}\arctan(\frac{\omega}{\gamma}) \tag{5}$$

e il valore del massimo vale

$$x_{max,d} = x(t_d) = A\sin(\omega t_d)\,e^{-\gamma t_d} \tag{6}$$

Osserviamo ora che dalla trigonometria

$$\omega t_d = \arctan(\frac{\omega}{\gamma}) \qquad \Rightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} \cos(\omega t_d) & = & \dfrac{\gamma}{\sqrt{\omega^2+\gamma^2}} \\ & & \\ \sin(\omega t_d) & = & \dfrac{\omega}{\sqrt{\omega^2+\gamma^2}} \end{array} \right. \tag{7}$$

Sostituendo in (6) otteniamo pertanto

$$\begin{aligned} x_{max,d} &= A\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+\gamma^2}}\, e^{-\frac{\gamma}{\omega}\arctan(\frac{\omega}{\gamma})} = \\ &= \frac{A}{\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2}}\, e^{-\frac{\gamma}{\omega}\arctan(\frac{\omega}{\gamma})} \end{aligned} \tag{8}$$

Sostituendo (solo ora!) i dati numerici del testo $A = 2\,\mathrm{m}$ ed il rapporto $\gamma/\omega = 1/2$, otteniamo

$$\begin{aligned} x_{max,d} &= 2\,\mathrm{m}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\arctan 2} = \\ &= \frac{4\,\mathrm{m}}{\sqrt{5}}\, e^{-\frac{1}{2}\arctan 2} = 1.03\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{9}$$

5. L'istante in cui viene raggiunto il massimo scostamento verso sinistra è dato da

$$n = 1 \qquad \Rightarrow \qquad t_s = t_{n=1} = \frac{1}{\omega}\left(\arctan(\frac{\omega}{\gamma}) + \pi\right) = t_d + \frac{\pi}{\omega} \tag{10}$$

e il valore del massimo vale

$$x_{max,s} = x(t_s) = A\sin(\omega t_s)\, e^{-\gamma t_s} \tag{11}$$

Dalla trigonometria e dalle relazioni (7) abbiamo

$$\sin(\omega t_s) = \sin(\omega(t_d + \frac{\pi}{\omega})) = \sin(\omega t_d + \pi) = -\sin(\omega t_d) = -\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+\gamma^2}} \tag{12}$$

Sostituendo in (11) otteniamo pertanto

$$\begin{aligned} x_{max,s} &= -A\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+\gamma^2}}\, e^{-[\frac{\gamma}{\omega}\arctan(\frac{\omega}{\gamma}) + \frac{\pi\gamma}{\omega}]} = \\ &= -\frac{A}{\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2}}\, e^{-\frac{\gamma}{\omega}\arctan(\frac{\omega}{\gamma})}\, e^{-\frac{\pi\gamma}{\omega}} \end{aligned} \tag{13}$$

Sostituendo (solo ora!) i dati numerici del testo $A = 2\,\mathrm{m}$ ed il rapporto $\gamma/\omega = 1/2$, otteniamo

$$\begin{aligned} x_{max,s} &= -2\,\mathrm{m}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\arctan 2}\, e^{-\frac{\pi}{2}} = \\ &= -\frac{4\,\mathrm{m}}{\sqrt{5}}\, e^{-\frac{1}{2}\arctan 2}\, e^{-\frac{\pi}{2}} = -0.21\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{14}$$

6. Il rapporto $|\frac{x_{max,s}}{x_{max,d}}|$ indica di quanto percentualmente lo scostamento a sinistra è più piccolo (in valore assoluto) dello scostamento a destra. Dalle espressioni (9) e (13) abbiamo
$$|\frac{x_{max,s}}{x_{max,d}}| = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0.21 = 21\% \qquad (15)$$

OSSERVAZIONE
Fisicamente la legge oraria (1) rappresenta ad esempio il moto di una particella attaccata ad una molla in presenza di attrito.