

Esercizio

Un'automobile, inizialmente ferma, si mette in moto ed accelera. Si osserva che l'andamento della sua velocità nel tempo è ben descritto dalla seguente legge oraria

$$v(t) = bt^2 \quad (1)$$

dove b è una costante. Dopo 3 s l'auto ha percorso 20 m.

1. Determinare l'unità di misura della costante b ;
2. Determinare il valore della costante b ;
3. Determinare quanto tempo impiega l'auto per raggiungere la velocità di 100 Km/h.

SOLUZIONE:

1. La dimensione del parametro b si determina osservando che

$$\begin{aligned}
 v(t) &= bt^2 \\
 \Downarrow \\
 [v] &= [b] [t^2] \\
 \Downarrow \\
 [b] &= \frac{[v]}{[t^2]} = \frac{\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\text{s}^2} = \frac{\text{m}}{\text{s}^3}
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

2. In generale, quando abbiamo la legge oraria $v(t)$ della velocità, l'integrale di $v(t)$ da un istante t_1 ad un istante t_2 è l'area sottesa dalla curva $v(t)$

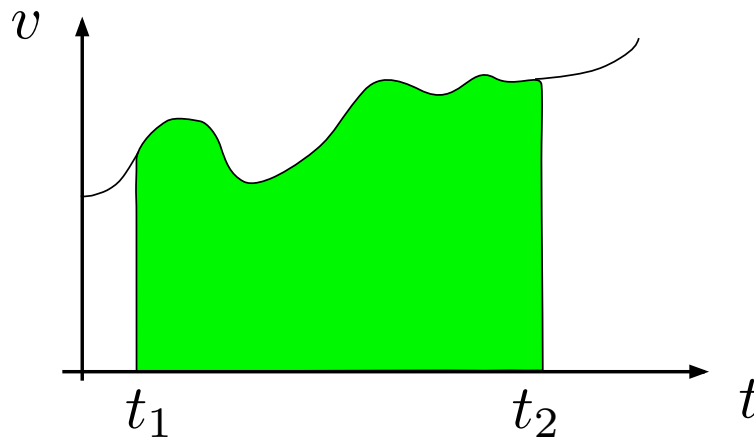


Figure 1:

e fisicamente rappresenta la variazione di posizione della particella tra t_1 e t_2 , ossia

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = \underbrace{x(t_2) - x(t_1)}_{=\Delta x \text{ variazione di posizione}}
 \tag{3}$$

Questo risultato è una conseguenza della definizione stessa di derivata e del teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx}{dt} dt = x(t_2) - x(t_1) = \Delta x
 \tag{4}$$

- Nel problema in questione, l'andamento di $v(t)$ è come descritto in figura 2. La curvatura della parabola è data dal parametro b , e dobbiamo determinarlo.

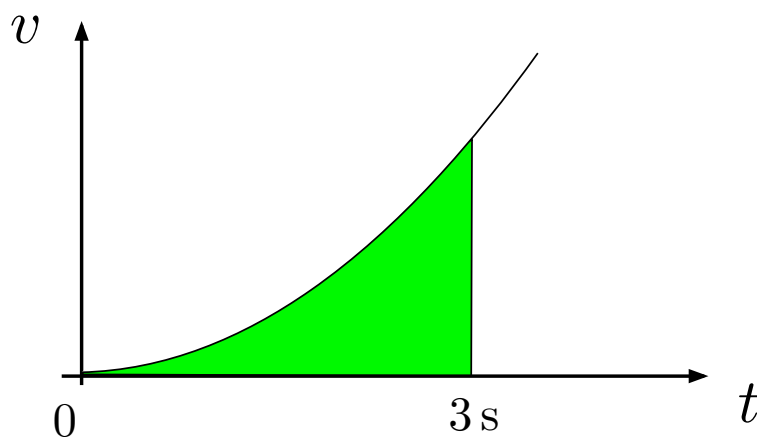


Figure 2:

- Possiamo scegliere l'origine dell'asse x nel punto da cui l'auto parte. Abbiamo due istanti in cui conosciamo la posizione dell'auto. Infatti sappiamo

$$t = 0\text{ s} \quad \rightarrow \quad x(t = 0\text{ s}) = 0 \quad (\text{per definizione dell'origine}) \quad (5)$$

$$t = 3\text{ s} \quad \rightarrow \quad x(t = 3\text{ s}) = 20\text{ m} \quad (\text{per quanto scritto nel testo}) \quad (6)$$

- Applichiamo la formula generale (3) al caso specifico, dove $t_1 = 0\text{ s}$ e $t_2 = 3\text{ s}$

$$\begin{aligned} \int_{0\text{ s}}^{3\text{ s}} v(t) dt &= x(t = 3\text{ s}) - x(t = 0\text{ s}) \\ &\Downarrow \\ \int_{0\text{ s}}^{3\text{ s}} b t^2 dt &= 20\text{ m} - 0\text{ m} \\ &\Downarrow \\ b \left. \frac{t^3}{3} \right|_{0\text{ s}}^{3\text{ s}} &= 20\text{ m} \\ &\Downarrow \\ b \left(\frac{(3\text{ s})^3}{3} - 0\text{ s}^3 \right) &= 20\text{ m} \\ &\Downarrow \\ b 9\text{ s}^3 &= 20\text{ m} \end{aligned} \quad (7)$$

da cui otteniamo

$$b = \frac{20\text{ m}}{9\text{ s}^3} \quad (8)$$

3. A questo punto conosciamo la legge oraria della velocità al completo. Denotiamo con $v^* = 100\text{ Km/h}$ e con t^* l'istante (incognito) in cui l'auto la raggiunge. Abbiamo

$$v^* = v(t^*) = b t^{*2} \quad (9)$$

da cui

$$t^* = \sqrt{\frac{v^*}{b}} \quad (10)$$

Per determinare l'istante t^* occorre prima convertire il dato in unità di misura del Sistema Internazionale

$$\begin{aligned} v^* &= 100 \frac{\text{Km}}{\text{h}} = \frac{100 \cdot 1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \\ &= \frac{100 \text{ m}}{3.6 \text{ s}} \end{aligned} \quad (11)$$

Sostituendo (11) in (10) otteniamo

$$\begin{aligned} t^* &= \sqrt{\frac{v^*}{b}} = \\ &= \sqrt{\frac{\frac{100 \text{ m}}{3.6 \text{ s}}}{\frac{20 \text{ m}}{9 \text{ s}^3}}} = \\ &= \sqrt{\frac{5 \cdot 9}{3.6}} \text{ s}^2 = \\ &= 3.54 \text{ s} \end{aligned} \quad (12)$$