Esercizio

Si supponga di descrivere l'autostrada Torino-Milano con una retta, con origine a Torino e orientata verso Milano, come mostrato in Fig.1. Un'auto parte da Torino e percorre il tragitto Torino-Milano due volte al giorno, seguendo la legge oraria

$$x(t) = D\,\sin^2(\omega t) \qquad\qquad t \in [0; \frac{2\pi}{\omega}] \tag{1}$$

dove $D = 150\,\mathrm{Km}$ è la distanza Torino-Milano.

1. Determinare l'unità di misura della costante ω.

Si supponga ora il seguente valore: $\omega = 2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$.

2. Partendo al tempo $t = 0$ da Torino, in quale istante l'auto raggiunge Milano la prima volta? E la seconda volta?
3. Dopo quanto tempo l'auto si trova nuovamente a Torino la prima volta? E la seconda?
4. Disegnare il grafico della legge oraria;
5. Calcolare la legge oraria della velocità dell'auto e disegnarne il grafico.
6. Calcolare la velocità media dell'auto lungo ciascuna tratta Torino→Milano (solo andata).
7. Calcolare la velocità massima raggiunta durante il tragitto. In che posizione si trova quando raggiunge tale velocità massima?
8. In quali istanti (durante tutto il tragitto) l'auto passa da Novara, situata a distanza $x = 2D/3$ da Torino?

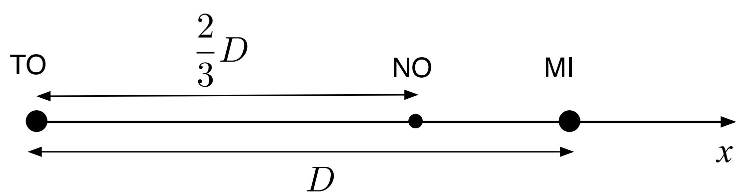

Figure 1:

SOLUZIONE

1. Dato che l'argomento ωt di $\sin(\omega t)$ deve essere adimensionale, l'unità di misura di ω è s^{-1}. Infatti

$$[\omega\, t] = 1 \qquad \Rightarrow \qquad [\omega]\,[\,t] = 1 \qquad \Rightarrow \qquad [\omega] = \frac{1}{[\,t]} = \frac{1}{\mathrm{s}}$$

2. Dato che Milano si trova alla coordinata $x = D$, l'auto raggiunge Milano agli istanti t (compresi nell'intervallo $t \in [0; 2\pi/\omega]$) tali che

$$x(t) = D \qquad \Rightarrow \qquad D\sin^2(\omega t) = D \qquad \Rightarrow \qquad \sin(\omega t) = \pm 1 \tag{2}$$

ossia agli istanti

$$t_1 = \frac{\pi}{2\omega} \tag{3}$$
$$t_2 = \frac{3\pi}{2\omega} \tag{4}$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo

$$t_1 = \frac{\pi}{2\cdot 2\cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}} = 7854\,\mathrm{s} = 2\times 3600\,\mathrm{s} + 10\times 60\mathrm{s} + 54\mathrm{s} = 2\mathrm{h}\,10\mathrm{min}\,54\mathrm{s} \tag{5}$$
$$t_2 = \frac{3\pi}{2\cdot 2\cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}} = 23562\,\mathrm{s} = 6\times 3600\,\mathrm{s} + 32\times 60\mathrm{s} + 42\mathrm{s} = 6\mathrm{h}\,32\mathrm{min}\,42\mathrm{s} \tag{6}$$
$$\tag{7}$$

3. Dato che Torino si trova alla coordinata $x = 0$, l'auto raggiunge Torino agli istanti t (compresi nell'intervallo $t \in [0; 2\pi/\omega]$) tali che

$$x(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad D\sin^2(\omega t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sin(\omega t) = 0 \tag{8}$$

ossia agli istanti

$$t_0 = 0 \qquad \text{(istante iniziale di partenza)} \tag{9}$$
$$t_3 = \frac{\pi}{\omega} \qquad \text{(primo ritorno a TO)} \tag{10}$$
$$t_4 = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{(secondo ritorno a TO)} \tag{11}$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo

$$t_3 = \frac{\pi}{2\cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}} = 15708\,\mathrm{s} = 4\times 3600\,\mathrm{s} + 21\times 60\mathrm{s} + 48\mathrm{s} = 4\mathrm{h}\,21\mathrm{min}\,48\mathrm{s} \tag{12}$$
$$t_4 = \frac{2\pi}{2\cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}} = 31416\,\mathrm{s} = 8\times 3600\,\mathrm{s} + 43\times 60\mathrm{s} + 36\mathrm{s} = 8\mathrm{h}\,43\mathrm{min}\,36\mathrm{s} \tag{13}$$
$$\tag{14}$$

4. Per disegnare il grafico della legge oraria :
- disegno i punti (=istante e relativa posizione) in cui si trova a Torino;
- disegno i punti (=istante e relativa posizione) in cui si trova a Milano;
- osservo che $\sin^2(\omega t) \geq 0$;
- noto che per istanti brevi (ossia per $\omega t \ll 1$) la legge oraria ha un andamento parabolico $x(t) = D\sin^2(\omega t) \simeq D\,\omega^2\,t^2$.

Il risultato è mostrato in Fig.2

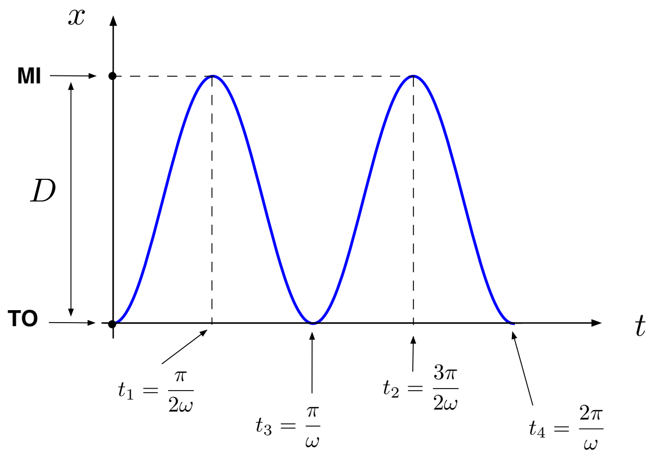

Figure 2: Grafico della legge oraria (1).

5. La velocità istantanea dell'auto è la derivata rispetto al tempo della legge oraria

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 2D\omega \sin(\omega t)\cos(\omega t) = D\omega \sin(2\omega t) \tag{15}$$

ed è rappresentata dalla curva rossa in Fig.3.

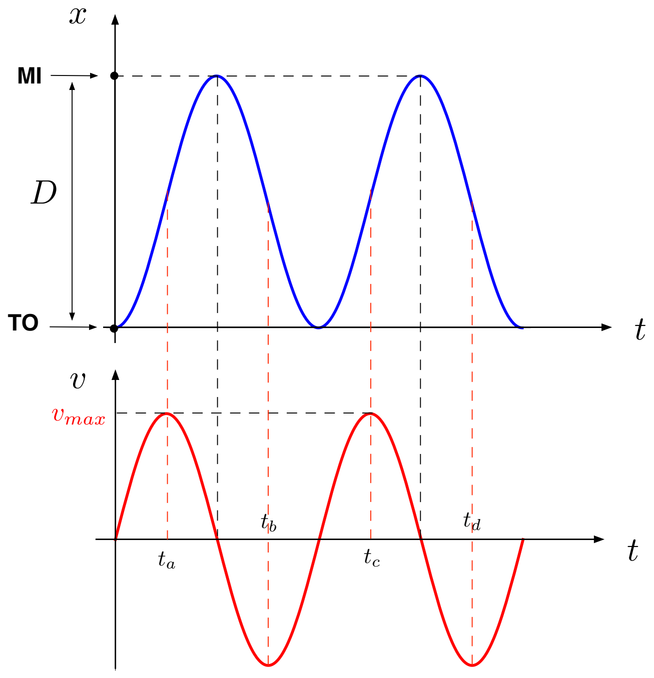

Figure 3: Grafico della legge oraria (1) [curva blu] e della legge oraria della velocità (15) [curva rossa].

6. La velocità media nella tratta di andata Torino-Milano (ad esempio la prima) è data da

$$\bar{v} = \frac{D}{t_1} = \frac{150 \cdot 10^3 \mathrm{m}}{7854\,\mathrm{s}} = 19.1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 19.1\frac{\frac{\mathrm{Km}}{1000}}{\frac{\mathrm{h}}{3600}} = 68.6\,\mathrm{Km/h} \tag{16}$$

7. La velocità massima (in modulo) si ottiene direttamente guardando la (15), ossia

$$v_{max} = D\omega = 150 \cdot 10^3 \mathrm{m} \cdot \, 2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1} = 30\mathrm{m/s} = 30 \frac{\frac{\mathrm{Km}}{1000}}{\frac{\mathrm{h}}{3600}} = 108\,\mathrm{Km/h} \tag{17}$$

e viene raggiunta agli istanti t tali che

$$v(t) = \pm D\omega \qquad \Rightarrow \qquad D\omega \sin(2\omega t) = \pm D\omega \qquad \Rightarrow \qquad \sin(2\omega t) = \pm 1 \tag{18}$$

ossia agli istanti

$$t_a = \frac{\pi}{4\omega} \tag{19}$$
$$t_b = \frac{3\pi}{4\omega} \tag{20}$$
$$t_c = \frac{5\pi}{4\omega} \tag{21}$$
$$t_d = \frac{7\pi}{4\omega} \tag{22}$$

In tali istanti l'auto si trova a

$$x_a = x(t_a) = D\sin^2\left(\omega \cdot \frac{\pi}{4\omega}\right) = D\sin^2(\frac{\pi}{4}) = \frac{D}{2} \tag{23}$$
$$x_b = x(t_b) = D\sin^2\left(\omega \cdot \frac{3\pi}{4\omega}\right) = D\sin^2(\frac{3\pi}{4}) = \frac{D}{2} \tag{24}$$
$$x_c = x(t_c) = D\sin^2\left(\omega \cdot \frac{5\pi}{4\omega}\right) = D\sin^2(\frac{5\pi}{4}) = \frac{D}{2} \tag{25}$$
$$x_d = x(t_d) = D\sin^2\left(\omega \cdot \frac{7\pi}{4\omega}\right) = D\sin^2(\frac{7\pi}{4}) = \frac{D}{2} \tag{26}$$

Pertanto il valore assoluto della velocità è sempre raggiunto a metà strada tra Torino e Milano.

8. Dato che Novara si trova alla coordinata $x = 2D/3$, l'auto si trova a Novara agli istanti t (compresi nell'intervallo $t \in [0; 2\pi/\omega]$) tali che

$$x(t) = \frac{2}{3}D \qquad \Rightarrow \qquad D\sin^2(\omega t) = \frac{2}{3}D \qquad \Rightarrow \qquad \sin(\omega t) = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \tag{27}$$

$$t_e = \frac{1}{\omega}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} \simeq \frac{0.96}{\omega} \qquad \text{(primo passaggio da Novara (direzione MI))} \tag{28}$$
$$t_f = \frac{1}{\omega}\left(\pi - \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \qquad \text{(secondo passaggio da Novara (direzione TO))} \tag{29}$$
$$t_g = \frac{1}{\omega}\left(\pi + \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \qquad \text{(terzo passaggio da Novara (direzione MI))} \tag{30}$$
$$t_h = \frac{1}{\omega}\left(2\pi - \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \qquad \text{(quarto passaggio da Novara (direzione TO))} \tag{31}$$

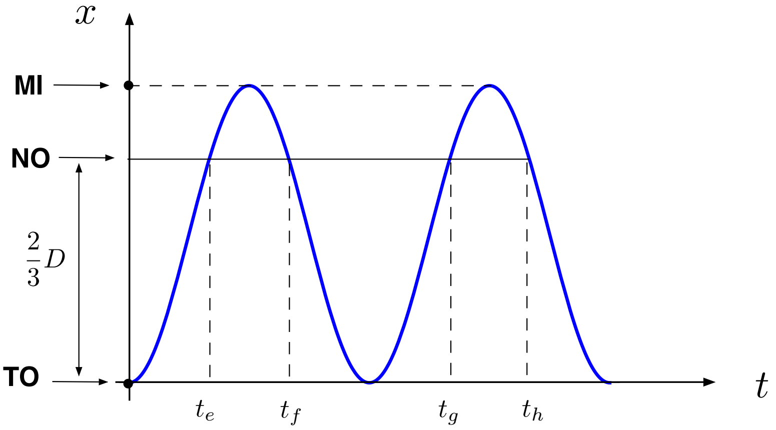

Figure 4: Gli istanti in cui l'auto passa da Novara.

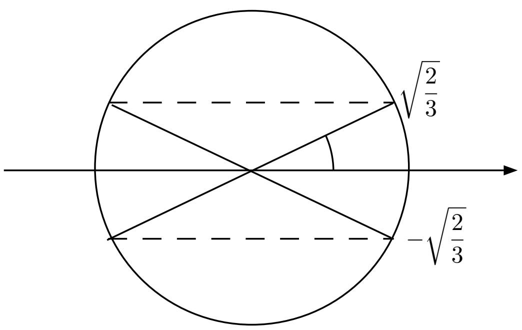

Figure 5: