Esercizio

Una particella si muove lungo l'asse x seguendo la seguente legge oraria

$$x(t) = x_0 + \alpha\, t^2 - b\, t^3 \tag{1}$$

1. Determinare le unità di misura delle costanti α e b.

Si supponga ora $x_0 = 1\,\mathrm{m}$, $\alpha = 1\,\mathrm{m/s^2}$ e $b = \frac{1}{3}\,\mathrm{m/s^3}$.

2. Calcolare la velocità e l'accelerazione della particella all'istante $t = 2\,\mathrm{s}$;
3. Calcolare la velocità massima della particella nell'intervallo temporale $t \in [0\,\mathrm{s}; 4\,\mathrm{s}]$;
4. Determinare gli scostamenti massimi $x_d > 0$ (verso destra) e $x_s < 0$ (verso sinistra) che la particella ha rispetto all'origine nell'intervallo temporale $t \in [0\,\mathrm{s}; 4\,\mathrm{s}]$;
5. Disegnare il grafico della legge oraria nell'intervallo temporale $t \in [0\,\mathrm{s}; 4\,\mathrm{s}]$.

SOLUZIONE

1. Siccome l'espressione (1) riguarda una coordinata spaziale, ciascuno dei tre addendi deve avere la dimensione di m. Pertanto

$$\mathrm{m} = [\alpha t^2] = [\alpha]\,\mathrm{s}^2 \qquad \Rightarrow \qquad [\alpha] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{2}$$

$$\mathrm{m} = [b\,t^3] = [b]\,\mathrm{s}^3 \qquad \Rightarrow \qquad [b] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3} \tag{3}$$

2. • Anzitutto calcoliamo l'espressione della velocità e dell'accelerazione ad un generico istante t.

   La velocità è la derivata temporale della legge oraria $x(t)$. Pertanto

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 2\alpha t - 3\,b\,t^2 \tag{4}$$

   L'accelerazione è, a sua volta, la derivata temporale della velocità $v(t)$, e dunque

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 2\alpha - 6\,b\,t \tag{5}$$

   • Valutiamo ora queste espressioni generali all'istante particolare $t = 2\,\mathrm{s}$.
   Dalla (4) abbiamo

$$\begin{aligned} v(t=2\mathrm{s}) &= 2 \cdot (1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^{\cancel{2}}})\,(2\,\cancel{\mathrm{s}}) - \cancel{3} \cdot \frac{1}{\cancel{3}}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\,(2\,\mathrm{s})^2 = \\ &= 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \\ &= 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{6}$$

   Per l'accelerazione, dalla (5) abbiamo

$$\begin{aligned} a(t=2\mathrm{s}) &= 2 \cdot (1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}) - 6 \cdot \frac{1}{3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\,(2\,\mathrm{s}) = \\ &= 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \\ &= -2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned} \tag{7}$$

   Notiamo che l'accelerazione è negativa, il che significa che all'istante $t = 2\,\mathrm{s}$ la particella sta diminuendo la sua velocità. Dato che la velocità è nulla, ne deduciamo che l'istante $t = 2\,\mathrm{s}$ è l'istante a partire dal quale la particella comincia ad acquisire velocità negativa, ossia l'istante a partire dal quale inizia a tornare indietro (NB: ciò *non* significa che la particella si trovi nell'origine, ma semplicemente che sta iniziando a tornare verso sinistra).

3. Per calcolare la velocità massima nell'intervallo $t \in [0\,\mathrm{s}; 4\,\mathrm{s}]$ osserviamo anzitutto che l'espressione (4) trovata per la velocità rappresenta una parabola rovesciata. Per determinare il massimo di $v(t)$ occorre dunque:

   - determinare i punti in cui si annulla la derivata di $v(t)$ (ossia in cui si annulla l'accelerazione $a(t)$); dalla (5) abbiamo che

     $$\begin{aligned} a(t) &= 2\alpha - 6\,b\,t = 0 \\ &\Rightarrow t^* = \frac{\alpha}{3b} \end{aligned} \qquad (8)$$

     In tale istante la velocità vale [vedi la (4)]

     $$\begin{aligned} v^* &= v(t^*) = 2\alpha t^* - 3bt^{*2} = \\ &= 2\alpha\,\frac{\alpha}{3b} - 3\,b\left(\frac{\alpha}{3b}\right)^2 = \\ &= \frac{2}{3}\frac{\alpha^2}{b} - \frac{1}{3}\frac{\alpha^2}{b} \\ &= \frac{1}{3}\frac{\alpha^2}{b} \end{aligned} \qquad (9)$$

     Sostituendo i valori numerici abbiamo

     $$\begin{aligned} v^* &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1^2\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^4}}{\frac{1}{3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}} = \\ &= 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned} \qquad (10)$$

   - valutare $v(t)$ ai punti estremali dell'intervallo. Dalla (4) abbiamo

     $$v_1 = v(t = 0\,\mathrm{s}) = 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad (11)$$

     e

     $$\begin{aligned} v_2 &= v(t = 4\,\mathrm{s}) = 2\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(4\,\mathrm{s}) - 3\cdot\frac{1}{3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\,(4\,\mathrm{s})^2 = \\ &= 8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 16\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \\ &= -8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned} \qquad (12)$$

   - Confrontando i valori (10), (11) e (12) osserviamo che nell'intervallo $t \in [0\,\mathrm{s}; 4\,\mathrm{s}]$:

     -in valore assoluto la velocità massima si registra all'istante $t = 4\,\mathrm{s}$, è negativa in segno (verso sinistra) e vale $v_2 = -8\,\mathrm{m/s}$

     -la velocità massima in avanti (verso destra) si registra all'istante $t^* = \alpha/(3b) = 1\,\mathrm{s}$ e vale $v^* = +1\,\mathrm{m/s}$.

4. Per calcolare lo scostamento massimo dall'origine nell'intervallo $t \in [0\,\mathrm{s}; 4\,\mathrm{s}]$ dobbiamo valutare i massimi della legge oraria $x(t)$. Di nuovo, per determinare i massimi occorre:

   - determinare gli istanti in cui si annulla la derivata di $x(t)$ (ossia in cui si annulla la velocità $v(t)$); dalla (4) abbiamo che

   $$v(t) = 2\alpha t - 3\,b\,t^2 = t\,(2\alpha - 3bt) = 0 \tag{13}$$

   da cui abbiamo due soluzioni:

   $$t_a = 0\,\mathrm{s} \tag{14}$$

   $$t_b = \frac{2\alpha}{3b} = 2\,\mathrm{s} \tag{15}$$

   In tali istanti la posizione vale [vedi la (1)]

   $$\begin{aligned} x_a &= x(t_a) = x_0 + \alpha\, t_a^2 - b\, {t_a}^3 = \\ &= x_0 + 0 + 0 = \\ &= 1\,\mathrm{m} \qquad \text{(positivo, quindi a destra dell'origine)} \end{aligned} \tag{16}$$

   e

   $$\begin{aligned} x_b &= x(t_b) = x_0 + \alpha\, t_b - b\, t_b^3 = \\ &= x_0 + \alpha\left(\frac{2\alpha}{3b}\right)^2 - b\left(\frac{2\alpha}{3b}\right)^3 = \\ &= x_0 + \frac{4\alpha^3}{9b^2} - \frac{8\alpha^3}{27b^2} = \\ &= x_0 + \frac{4\alpha^3}{27b^2} = \\ &= 1\,\mathrm{m} + \frac{4\,\frac{\mathrm{m}^3}{\cancel{\mathrm{s}}^6}}{27 \cdot \frac{1}{9}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\cancel{\mathrm{s}}^6}} = \\ &= 1\,\mathrm{m} + \frac{4}{3}\mathrm{m} = \\ &= \frac{7}{3}\,\mathrm{m} = \\ &= 2.33\,\mathrm{m} \qquad \text{(positivo, quindi a destra dell'origine)} \end{aligned} \tag{17}$$

   - valutare $x(t)$ agli istanti estremali dell'intervallo. L'istante estremale $t = 0$ è già stato considerato in quanto è risultato essere anche un punto in cui si annulla la derivata $v(t)$; per l'istante estremale $t = 4\,\mathrm{s}$, dalla (1) abbiamo

   $$\begin{aligned} x_2 &= x(t = 4\,\mathrm{s}) = 1\,\mathrm{m} + \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(4\,\mathrm{s})^2 - \frac{1}{3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\,(4\,\mathrm{s})^3 = \\ &= 1\,\mathrm{m} + 16\,\mathrm{m} - \frac{64}{3}\,\mathrm{m} = \\ &= \frac{3 + 48 - 64}{3}\,\mathrm{m} = \\ &= -\frac{13}{3}\,\mathrm{m} \\ &= -4.33\,\mathrm{m} \qquad \text{(negativo, quindi a sinistra dell'origine)} \end{aligned} \tag{18}$$

- Confrontando i valori (16), (17) e (18) osserviamo che nell'intervallo $t \in [0\,\mathrm{s}; 4\,\mathrm{s}]$:

  -lo scostamento massimo verso destra vale $x_d = +2.33\,\mathrm{m}$ e si registra all'istante $t_b = 2\alpha/(3b) = 2\,\mathrm{s}$

  -lo scostamento massimo verso sinistra vale $x_s = -4.33\,\mathrm{m}$ e si registra all'istante $t = 4\,\mathrm{s}$.

5. Dagli elementi trovati in precedenza, possiamo tracciare il grafico della legge oraria. In particolare

   - all'istante $t = 0$ abbiamo $x(0) = 1\,\mathrm{m}$; ai primi istanti la legge oraria vale $x(t) \simeq x_0 + \alpha t^2$ con $\alpha > 0$, quindi è una parabola che cresce;
   - a grandi tempi, $x(t) \sim \mathcal{O}(t^3)$ ed è negativo;
   - la derivata si annulla agli istanti $t = 0$ e $t_b = 2\alpha/(3b) = 2\,\mathrm{s}$;
   - lo scostamento massimo verso destra vale $x_d = +2.33\,\mathrm{m}$ e si registra all'istante $t_b = 2\alpha/(3b) = 2\,\mathrm{s}$;
   - lo scostamento massimo verso sinistra vale $x_s = -4.33\,\mathrm{m}$ e si registra all'istante $t = 4\,\mathrm{s}$.

   Da queste informazioni possiamo tracciare il grafico mostrato in Fig.1

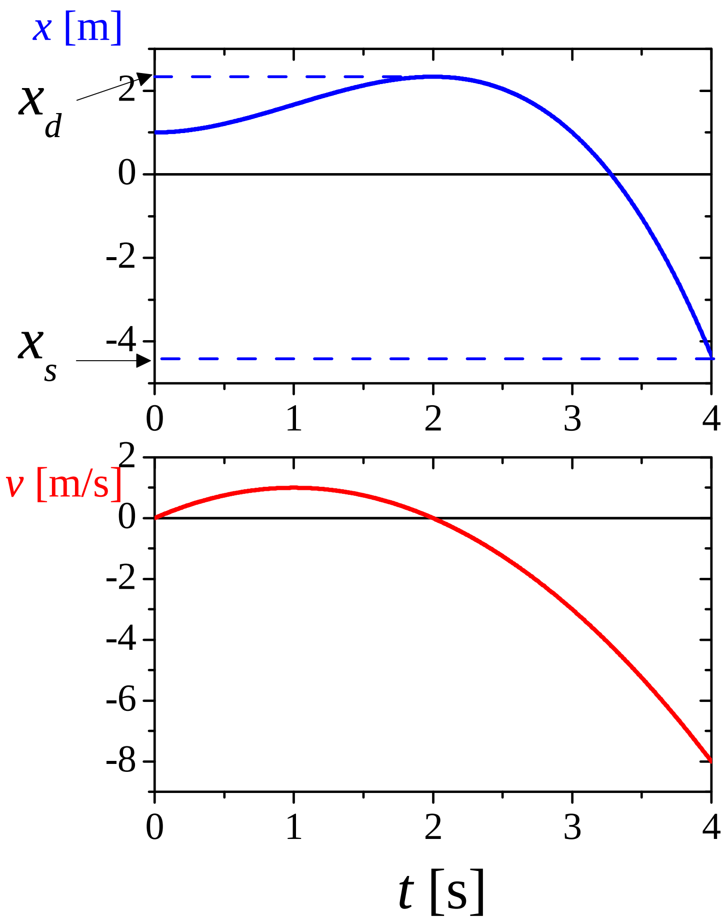

Figure 1: Andamento della legge oraria $x(t)$ della posizione [Eq.(1)] e $v(t)$ della velocità [Eq.(4)].