

Esercizio

Una particella si muove lungo l'asse x seguendo la seguente legge oraria

$$x(t) = v_0 t + \alpha t^2 + \beta t^3 \quad (1)$$

con $v_0 = 1 \text{ m/s}$.

1. Determinare le unità di misura delle costanti α e β ;
2. Calcolare la velocità della particella;

Considerare ora il caso $\alpha = 2 \text{ m/s}^2$ e $\beta = -(1/3) \text{ m/s}^3$

3. Determinare l'istante $t^* > 0$ in cui la particella si trova nell'origine dell'asse x ;
4. Determinare il valore massimo v_{max} della velocità (in avanti) della particella;

SOLUZIONE

1. Le unità di misura delle costanti α e β si determinano dal fatto che

$$\begin{cases} [x(t)] = \text{m} \\ [t] = \text{s} \end{cases} \quad (2)$$

Tutti gli addendi dell'espressione (1) devono avere la stessa unità di misura di $x(t)$ (ossia m). Abbiamo quindi

$$\begin{cases} \text{m} = [\alpha] \cdot \text{s}^2 \\ \text{m} = [\beta] \cdot \text{s}^3 \end{cases} \quad (3)$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} [\alpha] = \text{m/s}^2 \\ [\beta] = \text{m/s}^3 \end{cases} \quad (4)$$

2. La velocità della particella si calcola come la derivata rispetto al tempo della legge oraria della posizione

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} (v_0 t + \alpha t^2 + \beta t^3) \quad (5)$$

e si ottiene

$$v(t) = v_0 + 2\alpha t + 3\beta t^2 \quad (6)$$

3. La particella si trova nell'origine $x = 0$ negli istanti che soddisfano l'equazione

$$x(t) = v_0 t + \alpha t^2 + \beta t^3 = 0 \quad (7)$$

ossia

$$t (v_0 + \alpha t + \beta t^2) = 0 \quad (8)$$

Questa equazione dà le tre soluzioni

$$\begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4v_0\beta}}{\underbrace{2\beta}_{=-2|\beta|}} = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4v_0|\beta|}}{2|\beta|} < 0 \\ t_3 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4v_0\beta}}{\underbrace{2\beta}_{=-2|\beta|}} = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4v_0|\beta|}}{2|\beta|} > 0 \end{cases} \quad (9)$$

La prima soluzione $t_1 = 0$ rappresenta l'origine dei tempi, la seconda $t_2 < 0$ un tempo nel passato; l'unica soluzione a tempi positivi è $t_3 > 0$. Sostituendo i valori $\alpha = 2 \text{ m/s}^2$ e $\beta = -(1/3) \text{ m/s}^3$ e svolgendo i calcoli (anche sulle unità di misura !) otteniamo

$$t_3 = \frac{\frac{2\text{m}}{\text{s}^2} + \sqrt{\frac{4\text{m}^2}{\text{s}^4} + \frac{4\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^3}}}{\frac{2}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^3}} = \frac{\frac{2\text{m}}{\text{s}^2} + \sqrt{\frac{16}{3} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^4}}}{\frac{2}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^3}} = \frac{\frac{2\cancel{\text{m}}}{\text{s}^2} + \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\cancel{\text{m}}}{\text{s}^2}}{\frac{2}{3} \frac{\cancel{\text{m}}}{\text{s}^3}} = 6.46 \text{ s} \quad (10)$$

e quindi la risposta è

$$t^* = t_3 = 6.46 \text{ s} \quad (11)$$

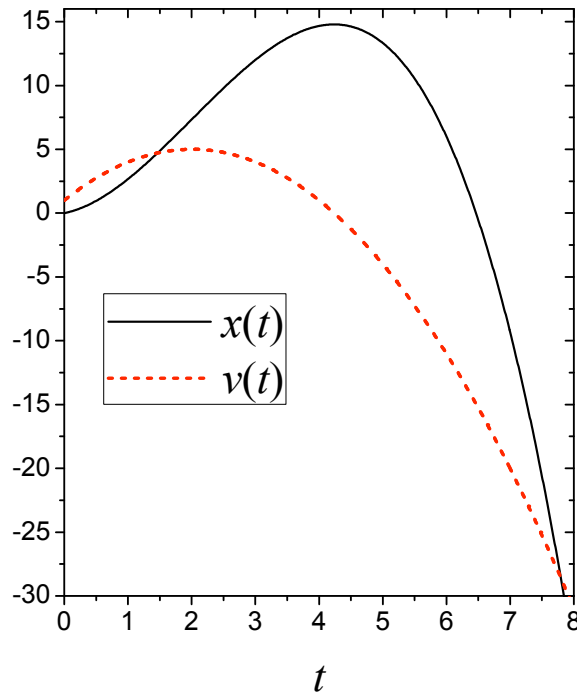


Figure 1: Andamento della legge oraria $x(t)$ [Eq.(1)] (curva nera solida) e della velocità $v(t)$ [Eq.(6)] (curva tratteggiata rossa).

4. Dall'espressione (6) per la velocità, osserviamo che $v(t)$ ha una legge parabolica nel tempo. Siccome $\beta < 0$ la parabola è rivolta verso il basso. Pertanto il massimo della velocità è il punto estremale, che si trova determinando l'annullamento della derivata della velocità (6) rispetto a t [dunque l'accelerazione].
Imponendo quindi

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{dv}{dt} = 0 \\ \Rightarrow a(t) &= 2\alpha + 6\beta t = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

otteniamo per soluzione il tempo al quale la velocità raggiunge il massimo, che dunque risulta

$$t_{max} = -\frac{\alpha}{3\beta} \quad (13)$$

Sostituendo il valore (13) nell'espressione generica della velocità otteniamo il valore di tale massimo

$$\begin{aligned} v_{max} &= v(t_{max}) = v_0 + 2\alpha t_{max} + 3\beta t_{max}^2 = \\ &= v_0 - \frac{2\alpha^2}{3\beta} + 3\beta \frac{\alpha^2}{9\beta^2} = \\ &= v_0 - \frac{2\alpha^2}{3\beta} + \frac{\alpha^2}{3\beta} = \\ &= v_0 - \frac{\alpha^2}{3\beta} \end{aligned} \quad (14)$$

Sostituendo i valori numerici $v_0 = 1 \text{ m/s}$, $\alpha = 2 \text{ m/s}^2$ e $\beta = -\text{m}/(3\text{s}^3)$ otteniamo

$$\begin{aligned} v_{max} &= 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} + \frac{\frac{4\text{m}^2}{\text{s}^4}}{3 \cdot \frac{1}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^3}} = \\ &= 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

e dunque

$$v_{max} = 5 \text{ m/s} \quad (15)$$

Si noti che per tempi lunghi la velocità (6) diventa grande e negativa (dato che $\beta < 0$), e dunque in *valore assoluto* la velocità diventa più grande di 5 m/s, ma con segno negativo (velocità indietro), come mostrato in Fig.1.