POLITECNICO DI TORINO

I Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Matematica per le Scienze dell'Ingegneria

Prova Finale

Stabilità ingresso-uscita per i sistemi lineari

Relatore:
prof. Andrea Bacciotti

Candidato:
Andrea Tosin

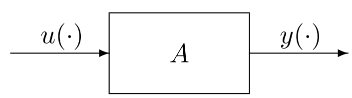
Settembre 2002

Presentazione

Un *sistema* fisico è un qualsiasi dispositivo che riceve dei segnali in ingresso e produce dei segnali in uscita; matematicamente, quindi, un sistema si configura come un operatore, detto *operatore ingresso-uscita*, lineare o meno, che agisce tra spazi di funzioni.

Per descrivere in termini matematici un sistema fisico è necessario conoscere le sollecitazioni esterne imposte al sistema (*ingressi*) e le conseguenti risposte fornite da quest'ultimo sul proprio stato (*uscite*): esse vengono modellizzate tramite grandezze numeriche variabili nel tempo e sono chiamate *segnali*[1]. È quindi importante assegnare con precisione un insieme di tempi $\mathcal{T}$, un insieme di ingressi $\mathcal{U}$ e un insieme di uscite $\mathcal{Y}$. In particolare, se $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{Z}$ si parla di sistemi in *tempo discreto*, se $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$ di sistemi in *tempo continuo*; $\mathcal{U}$ e $\mathcal{Y}$ sono invece spazi funzionali.

La dipendenza dell'uscita dall'ingresso è fornita dalla rappresentazione operatoriale del sistema: posto $y(\cdot) = Au(\cdot)$, $A : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ è il succitato operatore ingresso-uscita che trasforma ogni segnale di ingresso $u \in \mathcal{U}$ in un segnale di uscita $y \in \mathcal{Y}$.



Lo studio dei sistemi utilizza varie tecniche, tra cui quelle della teoria delle equazioni differenziali ordinarie o alle derivate parziali e dell'analisi funzionale, a seconda delle proprietà note dei sistemi in questione e del comportamento che si vuol far loro assumere. Ad esempio, se si è interessati a rappresentare fenomeni di evoluzione in tempo continuo a partire da certe condizioni di stato del sistema assegnate all'istante iniziale si utilizza la teoria delle equazioni differenziali; se invece, supponendo i segnali noti su tutto l'insieme temporale $\mathcal{T}$ di interesse, si vuole operare un controllo dell'uscita tramite l'ingresso si adottano strumenti di analisi funzionale. Una situazione piuttosto importante in cui si lavora seguendo questo secondo approccio è quella in cui l'ingresso rappresenta un disturbo (rumore) che si desidera filtrare o ridurre il più possibile: ciò tipicamente coinvolge considerazioni sulle norme rispettive dell'ingresso e dell'uscita (si noti che spesso la norma di un segnale rappresenta, dal punto di vista fisico, la sua energia) e, in particolare, sulla possibilità di controllare la norma dell'uscita tramite quella dell'ingresso attraverso opportune costanti che dipendono

[1] In questo contesto, il termine *segnale* è sinonimo di *funzione*. Un generico segnale di ingresso si indica di solito con $u(\cdot)$, un segnale di uscita con $y(\cdot)$ e la variabile temporale con t.

intrinsecamente dal sistema. Di qui si traggono, tra l'altro, indicazioni utili su come progettare il sistema per forzarlo a comportarsi nel modo voluto.

In questa tesi viene sviluppato il concetto di *stabilità ingresso-uscita* dei sistemi, che si inquadra nell'ambito degli studi condotti con tecniche di analisi funzionale. Dopo una presentazione dell'ambiente matematico in cui si impostano i problemi di ingresso-uscita (spazi funzionali di Lebesgue, cap. 1) e del significato di stabilità ingresso-uscita (cap. 2), si passa ad un'analisi più approfondita del concetto di operatore ingresso-uscita, dedicando ampio spazio al caso dei sistemi lineari tempo-invarianti (cap. 3), per i quali esiste un'efficiente teoria matematica basata sulla funzione di Green e la trasformata di Laplace, e concludendo con qualche accenno ai sistemi non lineari (cap. 4).

Il materiale esposto è per la maggior parte ricavato da [1].

Indice

Capitolo 1

Spazi di Lebesgue e loro estensioni

La nozione di integrale di Riemann, benché relativamente semplice ed efficiente, si rivela tuttavia inadeguata rispetto a certe questioni di natura sia teorica sia applicativa. In primo luogo, essa non permette di definire l'integrale di alcune funzioni che, seppur prive di regolarità in senso classico, hanno comunque buone proprietà di limitatezza. A questo proposito, l'esempio più noto è senz'altro la *funzione di Dirichlet*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } t \notin \mathbb{Q}: \end{cases}$$

poiché gli insiemi dei razionali $\mathbb{Q}$ e degli irrazionali $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono densi in $\mathbb{R}$, ogni intervallo reale $[a, b]$ di misura non nulla contiene almeno un punto in cui f vale 1 e almeno un punto in cui f vale 0. Perciò f non è integrabile su $[a, b]$ secondo Riemann in quanto i suoi integrali inferiore e superiore non coincidono, avendosi

$$\underline{\int_{[a,b]}} f = 0, \qquad \overline{\int_{[a,b]}} f = b - a.$$

In secondo luogo, l'operazione di passaggio al limite sotto il segno di integrale, o di integrazione per serie, è lecita unicamente sotto ipotesi molto restrittive (quali, ad esempio, la convergenza uniforme della successione o della serie in questione), non sempre verificabili in molte situazioni concrete.

Queste sono solo alcune delle constatazioni che inducono ad estendere il concetto di integrale e, più in generale, di misura di insiemi e a lavorare con funzioni di regolarità più debole di quella classica.

Un ulteriore fatto che rafforza tale necessità è il seguente: si consideri l'insieme $C([0, 1])$ delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sul compatto $[0, 1]$ dotato della norma infinito[1]

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|;$$

[1] Il teorema di Weierstrass permette di definire la norma infinito di una funzione $f \in C([0, 1])$ anche prendendo direttamente il massimo di $|f(t)|$ su $[0, 1]$ al posto dell'estremo superiore.

poiché se una successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1])$ converge uniformemente a una funzione f_0 allora $f_0 \in C([0,1])$, lo spazio normato $\{C([0,1]), \|\cdot\|_\infty\}$ è chiuso e inoltre si può dimostrare che esso è completo rispetto alla metrica indotta dalla norma $\|\cdot\|_\infty$: dunque è uno spazio di Banach. Per contro, si supponga di dotare $C([0,1])$ della norma quadratica

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

e si consideri la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1; \end{cases}$$

evidentemente $f \notin C([0,1])$ a causa del punto di salto in $t = \frac{1}{2}$ e tuttavia la serie di Fourier

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1}\sin(2\pi(2k+1)t),$$

le cui ridotte formano una successione di funzioni continue, converge nella norma $\|\cdot\|_2$ a f. Ne segue che lo spazio metrico $\{C([0,1]), \|\cdot\|_2\}$ non è chiuso e dunque nemmeno completo, ossia non è uno spazio di Banach.

Ora, molti risultati della teoria della stabilità ingresso-uscita richiedono che i problemi siano ambientati in spazi di Banach; per questa ragione non è conveniente lavorare negli spazi $C([a,b])$, poiché questi sono completi solo nel caso in cui siano dotati della norma infinito.

1.1 Spazi funzionali di Lebesgue

Ricordiamo che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *misurabile secondo Lebesgue* se la controimmagine di ogni intervallo è misurabile; equivalentemente, se la controimmagine di ogni insieme aperto è misurabile. Diamo quindi la seguente definizione.

Definizione 1.1. *Per ogni reale $p \in [1,+\infty)$, l'insieme $\mathcal{L}_p([0,+\infty)) = \mathcal{L}_p$ consiste di tutte le funzioni misurabili $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che*

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|^p \,\mathrm{d}t < +\infty;$$

per $p = +\infty$, l'insieme $\mathcal{L}_\infty([0,+\infty)) = \mathcal{L}_\infty$ consiste invece di tutte le funzioni misurabili $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ essenzialmente limitate[2] *su $[0,+\infty)$, cioè tali che*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,+\infty)} |f(t)| < +\infty.$$

[2]Ossia limitate tranne al più su un insieme di misura nulla.

In questa definizione si assume

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,+\infty)} |f(t)| = \inf\big\{r \in \mathbb{R} : \mu\big(\{t \in [0,+\infty) : |f(t)| > r\}\big) = 0\big\},$$

dove con $\mu(\Omega)$ si indica la misura di Lebesgue dell'insieme Ω.

Per ogni $p < +\infty$ è possibile introdurre la funzione $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}_p \to \mathbb{R}$ definita da

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{+\infty} |f(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$$

che ad ogni elemento $f \in \mathcal{L}_p$ associa un numero reale non negativo finito; analogamente, per $p = +\infty$ si può introdurre la funzione $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{L}_\infty \to \mathbb{R}$ definita da

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,+\infty)} |f(t)|.$$

Ciascuna di queste funzioni è una pseudo-norma su $\mathcal{L}_p$ ma non una norma in quanto $\|f\|_p = 0$ non implica $f \equiv 0$. In generale, infatti, se $\|f\|_p = 0$ allora la funzione f è nulla quasi ovunque su $[0,+\infty)$, ma non necessariamente coincide con la funzione nulla. Ad esempio, la funzione

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{se } t \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

appartiene ad $\mathcal{L}_p$ per ogni $p < +\infty$ e inoltre

$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}_+} |f(t)|^p \,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}_+\setminus\mathbb{N}} |f(t)|^p \,\mathrm{d}t = 0,$$

avendo osservato che $\mu(\mathbb{N}) = 0$, eppure $f \not\equiv 0$ su $[0,+\infty)$.

È dunque preferibile migliorare la Definizione 1.1, introducendo a tal fine la seguente relazione di equivalenza

$$f \sim g \quad \text{se} \quad f(t) - g(t) = 0 \text{ q.o. su } [0,+\infty) \tag{1.1}$$

e dando questa nuova

Definizione 1.2. *Per ogni reale $p \in [1,+\infty]$, l'insieme $L_p([0,+\infty)) = L_p$ è il quoziente di $\mathcal{L}_p$ rispetto alla relazione di equivalenza* (1.1)*, cioè*

$$L_p = \mathcal{L}_p/\sim.$$

Ora le succitate funzioni $\|\cdot\|_p$ sono effettivamente delle norme su L_p per ogni $p \in [1,+\infty]$ in quanto se risulta $\|f\|_p = 0$ allora f appartiene in L_p alla classe di equivalenza della funzione nulla, che è proprio lo zero di L_p. Ne segue che $\{L_p, \|\cdot\|_p\}$ è uno spazio normato per ogni $p \in [1,+\infty]$. Si osservi tuttavia che in L_p si ha sempre a che fare con classi di equivalenza: gli elementi di questo spazio non sono cioè propriamente funzioni e questo comporta che non abbia, ad esempio, alcun significato il valore puntuale di un elemento di L_p. Nel seguito, per brevità, diremo spesso che una funzione *appartiene* ad L_p per indicarne certe proprietà di integrabilità o di limitatezza[3]; a rigore, bisognerebbe più propriamente intendere che essa è il rappresentante di una determinata classe di equivalenza di funzioni in L_p.

Vi sono due importati disuguaglianze relative alle norme ora introdotte, che qui riportiamo senza dimostrare.

Lemma 1.3. (disuguaglianza di Minkowski) *Siano $f, g \in L_p$ con $p \in [1, +\infty]$ e si definisca la funzione $h(t) = f(t) + g(t)$; allora:*

(i) $h \in L_p$;

(ii) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. ∎

Lemma 1.4. (disuguaglianza di Hölder) *Siano $p, q \in [1, +\infty]$ tali che*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(se $p = +\infty$ si prenda $q = 1$ e viceversa) e siano $f \in L_p$ e $g \in L_q$; si definisca quindi la funzione $h(t) = f(t)g(t)$. Allora:

(i) $h \in L_1$;

(ii) $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$. ∎

La disuguaglianza di Minkowski mostra che L_p è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ per ogni p; si può altresì provare che rispetto alla metrica indotta dalla norma $\|\cdot\|_p$ esso è completo per ogni p e dunque di Banach. Inoltre, per $p = 2$ la norma $\|\cdot\|_2$ discende dal prodotto scalare

$$(f, g)_2 = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

da cui segue che L_2 è uno spazio di Hilbert.

Se con $C_p([0, +\infty))$ si indica il sottoinsieme di $\mathcal{L}_p$ delle funzioni continue, lo spazio $\{C_p, \|\cdot\|_p\}$ risulta normato per ogni $p \in [1, +\infty]$ e tuttavia in generale non completo, tranne che nel caso speciale $p = +\infty$. Anzi, se $p < +\infty$, $\mathcal{L}_p$ è proprio il completamento di C_p, poiché ogni funzione in $\mathcal{L}_p$ può essere approssimata, commettendo un errore arbitrariamente piccolo, da una funzione continua. In altre parole, C_p è denso in $\mathcal{L}_p$ per ogni $p < +\infty$.

1.2 Spazi L_p estesi

Gli spazi L_p forniscono l'ambito matematico ideale per ambientare i problemi di ingresso-uscita; tuttavia essi escludono una gran parte di funzioni che, seppur dotate talvolta di ottime proprietà di regolarità classica, non sono limitate oppure non hanno integrale finito su $[0, +\infty)$. È dunque preferibile estendere gli

[3]Quando si scrive $f \in L_p$, $p < +\infty$, si vuole semplicemente intendere che la funzione f ha la p-esima potenza sommabile, cioè che l'integrale $\int_0^{+\infty} |f(t)|^p\,\mathrm{d}t$ è finito; analogamente, quando si scrive $f \in L_\infty$ si vuole intendere che la funzione f è essenzialmente limitata su $[0, +\infty)$.

spazi di Lebesgue a insiemi un po' più ampi, per poter trattare una più vasta classe di problemi di stabilità.

A questo proposito, considerata una funzione $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ e fissato $T \geq 0$ chiamiamo *troncamento* di f sull'intervallo $[0, T]$ la funzione $f_T : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & \text{se } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{se } t > T; \end{cases}$$

diamo quindi la seguente definizione.

Definizione 1.5. *L'insieme L_{pe} consiste di tutte le funzioni $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ misurabili e con la proprietà che $f_T \in L_p$ per ogni valore finito $T \geq 0$; esso è chiamato **estensione di L_p** o **spazio L_p esteso**.*

Ad esempio, la funzione identica $f(t) = t$ appartiene a L_{pe} per ogni p in quanto ogni suo troncamento $f_T(t)$ appartiene a L_p per ogni p, avendosi

$$\|f_T\|_p^p = \int_0^{+\infty} |f_T(t)|^p \, \mathrm{d}t = \int_0^T t^p \, \mathrm{d}t = \frac{T^{1+p}}{1+p} < +\infty \qquad \text{se } p < +\infty$$

e altresì

$$\|f_T\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0,+\infty)} |f_T(t)| = \sup_{t \in [0,T]} |t| = T < +\infty;$$

si noti tuttavia che f non appartiene ad alcuno spazio L_p.

In sostanza, l'insieme L_{pe} consiste di tutte le funzioni misurabili f con la proprietà che ogni loro troncamento appartiene a L_p, benché f possa o meno appartenere a sua volta a L_p.

Non è difficile verificare che $L_p \subset L_{pe}$; il lemma seguente fornisce inoltre un'ulteriore relazione tra gli spazi di Lebesgue estesi e non estesi.

Lemma 1.6. *Per ogni $p \in [1, +\infty]$ l'insieme L_{pe} è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Inoltre, per ogni p fissato e per ogni $f \in L_{pe}$ si ha che:*

(i) $\|f_T\|_p$ *è una funzione non decrescente di T;*

(ii) $f \in L_p$ *se e solo se esiste una costante $M > 0$ tale che*

$$\|f_T\|_p \leq M$$

per ogni $T \geq 0$; in tal caso vale

$$\|f\|_p = \lim_{T \to +\infty} \|f_T\|_p.$$

Dimostrazione. Mostriamo che L_{pe} è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Evidentemente $0 \in L_{pe}$ per ogni $p \in [1, +\infty]$; siano ora $f, g \in L_{pe}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e consideriamo quindi la funzione $h(t) = \alpha f(t) + \beta g(t)$. Per ogni $T \geq 0$ risulta $h_T(t) = \alpha f_T(t) + \beta g_T(t)$ e inoltre, usando la disuguaglianza di Minkowski,

$$\|h_T\|_p = \|\alpha f_T + \beta g_T\|_p \leq |\alpha| \cdot \|f_T\|_p + |\beta| \cdot \|g_T\|_p$$

da cui $h_T \in L_p$ poiché $\|f_T\|_p, \|g_T\|_p < +\infty$ per ipotesi. Ne segue che anche $h \in L_{pe}$ e dunque che L_{pe} è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ in quanto chiuso rispetto alle combinazioni lineari a coefficienti reali.

Mostriamo ora (i). Per $p < +\infty$ definiamo la funzione $\varphi(T) = \|f_T\|_p^p$ $(T \geq 0)$ e osserviamo che se $x \geq 0$ la funzione $\psi(x) = x^p$ è non decrescente; basterà dunque provare che φ è non decrescente in T per avere la tesi. Risulta:

$$\varphi(T) = \int_0^T |f(t)|^p \,\mathrm{d}t$$

e dunque, fissati $T_1, T_2 \geq 0$ con $T_1 \leq T_2$,

$$\begin{aligned}\varphi(T_2) &= \int_0^{T_2} |f(t)|^p \,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^{T_1} |f(t)|^p \,\mathrm{d}t + \int_{T_1}^{T_2} |f(t)|^p \,\mathrm{d}t = \\ &= \varphi(T_1) + \int_{T_1}^{T_2} |f(t)|^p \,\mathrm{d}t \geq \varphi(T_1).\end{aligned}$$

Se invece $p = +\infty$ definiamo

$$\varphi(T) = \|f_T\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} |f(t)|$$

e quindi

$$\begin{aligned}\varphi(T_2) &= \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T_2]} |f(t)| = \\ &= \max\left\{\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T_1]} |f(t)|,\ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[T_1,T_2]} |f(t)|\right\} = \\ &= \max\left\{\varphi(T_1),\ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[T_1,T_2]} |f(t)|\right\} \geq \varphi(T_1),\end{aligned}$$

dunque la non decrescenza di φ è provata per ogni $p \in [1, +\infty]$.

Mostriamo infine (ii). Osserviamo anzitutto che si può scrivere

$$\begin{aligned}\|f\|_p &= \left(\lim_{T\to+\infty} \int_0^T |f(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \lim_{T\to+\infty} \left(\int_0^T |f_T(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \lim_{T\to+\infty} \|f_T\|_p\end{aligned}$$

avendo usato la continuità della funzione $x^{\frac{1}{p}}$ per $x \geq 0$, $p \geq 1$ e il fatto che $f \equiv f_T$ su $[0, T]$.

Supponiamo quindi che esista $M > 0$ che limita $\|f_T\|_p$ uniformemente in T; allora

$$\|f\|_p = \lim_{T\to+\infty} \|f_T\|_p \leq M$$

da cui $f \in L_p$.

Supponiamo ora che $f \in L_p$; dalla monotonia dell'integrale segue

$$\|f_T\|_p^p = \int_0^{+\infty} |f_T(t)|^p \,\mathrm{d}t = \int_0^T |f(t)|^p \,\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|^p \,\mathrm{d}t = \|f\|_p^p < +\infty$$

e quindi $\|f_T\|_p^p \leq \|f\|_p^p$; prendendo $M = \|f\|_p$ si ha la tesi. ■

In conclusione, lo spazio esteso L_{pe} è uno spazio vettoriale che contiene L_p come suo sottoinsieme proprio. Tuttavia, in generale L_{pe} non è uno spazio normato.

Le definizioni date per lo spazio L_p si estendono in modo naturale allo spazio L_p^n delle n-uple di funzioni $f = (f_1, ..., f_n)^{\mathrm{T}}$ con $f_i \in L_p$ per ogni $i = 1, ..., n$; in esso si introduce la norma

$$\|f\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

ovvero formalmente la norma euclidea del vettore $(f_1, ..., f_n)^{\mathrm{T}}$. Questa definizione è data in modo che L_2^n sia uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare

$$(f, g)_2 = \sum_{i=1}^{n} (f_i, g_i)_2.$$

Lo spazio L_{pe}^n è definito in modo analogo.

1.3 Operatori causali

Concludiamo questo capitolo con un accenno al concetto di *causalità*. Consideriamo un sistema rappresentato da un operatore A tra due spazi funzionali e indichiamo con Au l'uscita corrispondente all'ingresso u. Diamo quindi la seguente definizione.

Definizione 1.7. *Si dice che un operatore $A : L_{pe}^n \to L_{pe}^m$ è **causale** se esso soddisfa a*

$$(Au)_T = (Au_T)_T$$

per ogni $T \geq 0$ e per ogni $u \in L_{pe}^n$.

Una formulazione equivalente di questo concetto è fornita dal seguente lemma.

Lemma 1.8. *Si consideri un operatore $A : L_{pe}^n \to L_{pe}^m$; allora A è causale se e solo se per ogni $T \geq 0$ e per ogni coppia di funzioni $f, g \in L_{pe}^n$ tali che $f_T = g_T$ si ha*

$$(Af)_T = (Ag)_T.$$

Dimostrazione. Supponiamo che A soddisfaccia all'implicazione

$$f, g \in L_{pe}^n,\ f_T = g_T \Rightarrow (Af)_T = (Ag)_T \ \forall T \geq 0;$$

fissati $T \geq 0$ ed $f \in L^n_{pe}$, se scegliamo $g = f_T \in L^n_{pe}$ abbiamo evidentemente $g_T = g = f_T$ e anche $(Af)_T = (Af_T)_T$; dunque A è causale nel senso della Definizione 1.7.

Supponiamo ora che A sia causale. Prese $f, g \in L^n_{pe}$ tali che $f_T = g_T$ per $T \geq 0$, si ha $(Af)_T = (Af_T)_T$ e quindi anche $(Af)_T = (Ag_T)_T$; ma dalla causalità di A discende altresì $(Ag_T)_T = (Ag)_T$ e dunque, per transitività, $(Af)_T = (Ag)_T$. ■

La Definizione 1.7 e il Lemma 1.8 forniscono due interpretazioni alternative ma del tutto equivalenti della causalità. Secondo la Definizione 1.7 un operatore A è causale se ogni troncamento di Au sull'intervallo $[0, T]$ dipende unicamente dal corrispondente troncamento di u sul medesimo intervallo; altrimenti detto, i valori di $(Au)(t)$ su $[0, T]$ dipendono solo dai valori di $u(t)$ su $[0, T]$. Secondo il Lemma 1.8, invece, un operatore A è causale se, ogniqualvolta due ingressi sono uguali sull'intervallo $[0, T]$, le corrispondenti uscite sono a loro volta uguali sullo stesso intervallo.

Capitolo 2

Stabilità ingresso-uscita: definizioni

La stabilità ingresso-uscita, per il cui studio si utilizzano prevalentemente tecniche di analisi funzionale, rappresenta uno dei possibili modi di caratterizzare il funzionamento dei sistemi. A questo proposito, è importante precisare fin dall'inizio due aspetti:

(i) questo approccio non fa uso della nozione di stato del sistema, perciò quando si parla di stabilità in questo contesto non ci si riferisce alla stabilità nel senso di Lyapunov delle eventuali posizioni di equilibrio del sistema, ma piuttosto alla possibilità che il sistema offre di controllare globalmente l'uscita tramite l'ingresso; quindi, dicendo che un sistema è stabile in termini di ingresso-uscita si intende che se l'ingresso possiede determinate caratteristiche - ad esempio di limitatezza o di integrabilità - sull'intervallo temporale di interesse, anche l'uscita conserva, compatibilmente con le modifiche apportate dal sistema, tali caratteristiche;

(ii) una rappresentazione ingresso-uscita di un sistema e una tramite le variabili di stato costituiscono due modi diversi di guardare allo stesso sistema: esse forniscono cioè due punti di vista differenti relativamente a come il sistema funziona.

2.1 Operatori L_p-stabili

Si consideri un sistema descritto da un operatore $A : L^n_{pe} \to L^m_{pe}$ che a ogni ingresso $u \in L^n_{pe}$ fa corrispondere un'uscita $y \in L^m_{pe}$; diamo quindi le seguenti definizioni.

Definizione 2.1. *L'operatore A è detto **L_p-stabile** se per ogni $u \in L^n_p$ si ha $y = Au \in L^m_p$.*

Definizione 2.2. *Si dice che l'operatore A è L_p-stabile con la proprietà di **guadagno finito** (L_p-stabile gf) se è L_p-stabile e inoltre esistono due costanti γ, b finite tali che si abbia*

$$\|y\|_p \leq \gamma \|u\|_p + b \tag{2.1}$$

per ogni $u \in L_p^n$.

Definizione 2.3. *Si dice che l'operatore* A *è* L_p*-stabile con la proprietà di* ***guadagno finito senza distorsione*** *(*L_p*-stabile sd) se è* L_p*-stabile gf con* $b = 0$*, cioè se esiste* $\gamma \in \mathbb{R}_+$ *tale che*

$$\|y\|_p \leq \gamma \|u\|_p \tag{2.2}$$

per ogni $u \in L_p^n$.

È chiaro che la L_p-stabilità sd implica la L_p-stabilità gf, la quale a sua volta comporta la L_p-stabilità. L'esempio seguente mostra però che l'ordine di queste implicazioni non può essere invertito.

Esempio

Consideriamo le funzioni f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(r) = r^2, \quad g(r) = r + 1$$

e, posto $t \geq 0$, definiamo i seguenti operatori F, $G : L_{\infty e} \to L_{\infty e}$

$$(Fu)(t) = (f \circ u)(t), \quad (Gu)(t) = (g \circ u)(t)$$

dei quali vogliamo studiare le proprietà di L_∞-stabilità.

(i) $(Fu)(t) = u^2(t)$

Proviamo che l'operatore F è L_∞-stabile. Se $u \in L_\infty$ esiste una costante $M > 0$ tale che

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0,+\infty)} |u(t)| \leq M$$

quasi ovunque su $[0, +\infty)$; ma allora[1]

$$\|Fu\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0,+\infty)} |u^2(t)| = \left[\operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0,+\infty)} |u(t)| \right]^2 \leq M^2$$

e dunque $u^2 \in L_\infty$. Tuttavia F non ha la proprietà di guadagno finito: se così fosse dovrebbero esistere due costanti γ e b tali che

$$\|u^2\|_\infty = \|u\|_\infty^2 \leq \gamma \|u\|_\infty + b$$

per ogni $u \in L_\infty$, ma ciò è assurdo in quanto la parabola r^2 non può essere limitata da nessuna retta della forma $\gamma r + b$, avendo per $r \to +\infty$ ordine di infinito superiore rispetto a quest'ultima. Ne segue che F non è nemmeno L_∞-stabile sd.

(ii) $(Gu)(t) = u(t) + 1$

Osserviamo che per la disuguaglianza di Minkowski si ha

$$\|Gu\|_\infty = \|u + 1\|_\infty \leq \|u\|_\infty + 1$$

e ciò mostra che G è L_∞-stabile gf con $\gamma = b = 1$; esso è dunque anche L_∞-stabile, ma non è L_∞-stabile sd perché $b \neq 0$. $\square$

Mostriamo ora che la condizione (2.2), benché molto particolare, non è eccessivamente restrittiva, nel senso che esistono effettivamente operatori L_p-stabili sd.

[1] Date due funzioni f, g non negative, si ha in generale $\operatorname{ess\,sup}(fg) \leq \operatorname{ess\,sup} f \cdot \operatorname{ess\,sup} g$ e l'uguaglianza vale se e solo se $f = g$.

Esempio

Consideriamo la funzione $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(r) = \log\left(1 + r^2\right)$ e, posto $t \geq 0$, definiamo l'operatore $H : L_{\infty e} \to L_{\infty e}$, $(Hu)(t) = (h \circ u)(t)$.

Poiché risulta $\log\left(1 + r^2\right) \leq r$ per ogni $r \geq 0$, si ha

$$\|Hu\|_\infty = \| \log\left(1 + u^2\right) \|_\infty \leq \|u\|_\infty$$

e quindi H è L_∞-stabile sd con $\gamma = 1$. □

Esempio

Consideriamo l'operatore

$$(Au)(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)} u(\tau)\, \mathrm{d}\tau \quad (\alpha > 0)$$

e mostriamo anzitutto che esso manda $L_{\infty e}$ in sé.

A questo scopo, sia $u \in L_{\infty e}$: per ogni $T \geq 0$ esiste allora una costante $M_T > 0$ tale che $|u(t)| \leq M_T$ quasi ovunque su $[0, T]$. Posto $y(t) = (Au)(t)$, si ha poi

$$|y(t)| = \left| \int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)} u(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right| \leq \int_0^t \left| \mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)} \right| \cdot |u(\tau)|\, \mathrm{d}\tau$$

che per $t \in [0, T]$ dà

$$|y(t)| \leq M_T \mathrm{e}^{-\alpha t} \int_0^t \mathrm{e}^{\alpha\tau}\, \mathrm{d}\tau = \frac{M_T}{\alpha} \left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}\right) \leq \frac{M_T}{\alpha};$$

prendendo $N_T = \frac{M_T}{\alpha}$ si trova perciò una costante (dipendente da T) tale che $|y(t)| \leq N_T$ quasi ovunque su $[0, T]$, il che implica $y \in L_{\infty e}$.

Con un calcolo analogo a quello appena eseguito si può inoltre dimostrare che se $u \in L_\infty$ e se $\|u\|_\infty = M < +\infty$ si ha $|y(t)| \leq \frac{M}{\alpha}$ per ogni $t \in [0, +\infty)$, ossia $y \in L_\infty$, ragion per cui A è L_∞-stabile. Ma allora

$$|y(t)| \leq \frac{1}{\alpha} \|u\|_\infty \ \ \forall t \in [0, +\infty)$$

ovvero, passando all'estremo superiore,

$$\|y\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0, +\infty)} |y(t)| \leq \frac{1}{\alpha} \|u\|_\infty$$

il che mostra come A sia L_∞-stabile sd con $\gamma = \frac{1}{\alpha}$. □

Esempio

Consideriamo il sistema la cui relazione ingresso-uscita è descritta dall'operatore

$$(Au)(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{t-\tau} u(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

e mostriamo che esso manda $L_{\infty e}$ in sé.

Sia $u \in L_{\infty e}$ tale che per ogni $T \geq 0$ esiste una costante $M_T > 0$ per cui $|u(t)| \leq M_T$ quasi ovunque su $[0, T]$; posto $y(t) = (Au)(t)$ si ha allora, su $[0, T]$:

$$\begin{aligned}
|y(t)| &\leq \int_0^t \left|\mathrm{e}^{t-\tau}\right| \cdot |u(\tau)| \, \mathrm{d}\tau \leq \\
&\leq M_T \mathrm{e}^t \int_0^T \mathrm{e}^{-\tau} \, \mathrm{d}\tau \leq M_T \mathrm{e}^T \left(-\mathrm{e}^{-\tau} \right|_0^T = \\
&= M_T \left(\mathrm{e}^T - 1\right).
\end{aligned}$$

Ora, per ogni valore *finito* di T risulta $M_T \left(\mathrm{e}^T - 1\right) < +\infty$ e perciò $g \in L_{\infty e}$. Ciononostante, A non è L_∞-stabile: se si prende ad esempio $u(t) \equiv 1 \in L_\infty$ si può facilmente verificare che $y(t) = \mathrm{e}^t - 1$ e chiaramente $y \notin L_\infty$ perché y non si mantiene limitata quando $t \to +\infty$. $\square$

Quest'ultimo esempio mostra i vantaggi che si hanno lavorando con operatori ingresso-uscita definiti tra spazi L_p estesi: si dispone di uno strumento per descrivere e trattare matematicamente anche sistemi "instabili" (almeno nel senso della Definizione 2.1).

Vediamo ora alcune utili proprietà di stabilità degli operatori ingresso-uscita causali e di quelli lineari.

Teorema 2.4. *Sia $A : L_{pe}^n \to L_{pe}^m$ un operatore causale L_p-stabile e con la proprietà di guadagno finito. Se γ e b sono le due costanti tali che*

$$\|Au\|_p \leq \gamma \|u\|_p + b \quad \forall u \in L_p^n$$

allora vale

$$\|(Au)_T\|_p \leq \gamma \|u_T\|_p + b \quad \forall T \geq 0, \forall u \in L_{pe}^n.$$

Dimostrazione. Sia $u \in L_{pe}^n$ e si fissi $T \geq 0$; allora $u_T \in L_p^n$ e inoltre, essendo A L_p-stabile, $Au_T \in L_p^m$. Ma A ha la proprietà di guadagno finito, per cui

$$\|Au_T\|_p \leq \gamma \|u_T\|_p + b, \tag{2.3}$$

e inoltre è causale, il che implica $(Au)_T = (Au_T)_T$ e

$$\|(Au)_T\|_p = \|(Au_T)_T\|_p \leq \|Au_T\|_p. \tag{2.4}$$

Combinando ora (2.3) e (2.4) si ottiene la tesi. ■

Il prossimo risultato mostra che per gli operatori lineari i concetti di stabilità L_p con guadagno finito e senza distorsione non sono indipendenti.

Teorema 2.5. *Sia $A : L_{pe}^n \to L_{pe}^m$ un operatore lineare. Allora A è L_p-stabile gf se e solo se è L_p-stabile sd.*

Dimostrazione. (i) Se A è L_p-stabile sd allora esso è senz'altro L_p-stabile gf e questo indipendentemente dalla sua linearità.

(ii) Supponiamo che A sia L_p-stabile con guadagno finito; esistono allora due costanti γ e b tali che per ogni $u \in L_p^n$ si ha

$$\|Au\|_p \leq \gamma \|u\|_p + b. \tag{2.5}$$

Si prenda un numero $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e si consideri l'ingresso $ku \in L_p^n$; dev'essere allora

$$\|A(ku)\|_p \leq \gamma \|ku\|_p + b$$

che, per la linearità di A, dà

$$|k| \cdot \|Au\|_p \leq |k| \cdot \gamma \|u\|_p + b$$

da cui, dividendo ambo i membri per $|k|$,

$$\|Au\|_p \leq \gamma \|u\|_p + \frac{b}{|k|}.$$

Questa relazione coincide con la (2.5) se $k = 1$, ma vale inoltre per ogni k reale non nullo; lasciando $k \to \infty$ si vede che A è L_p-stabile sd. ■

Le Definizioni 2.2 e 2.3 stabiliscono rispettivamente che se un operatore è L_p-stabile con guadagno finito oppure senza distorsione, allora γ può essere una *qualsiasi* costante (purché finita) che garantisca la validità delle relazioni (2.1) e (2.2) per ogni ingresso $u \in L_p^n$. La seguente definizione elimina l'arbitrarietà nella scelta di γ.

Definizione 2.6. *Sia $A : L_{pe}^n \to L_{pe}^m$ un operatore ingresso-uscita.*

(i) Se A è L_p-stabile gf, allora il ***guadagno finito*** *di A è la costante non negativa*

$$\gamma_p(A) = \inf\big\{\gamma \in \mathbb{R}_+ \; : \; \exists b \geq 0 \text{ tale che vale la relazione (2.1)}\big\}.$$

(ii) Se A è L_p-stabile sd, allora il ***guadagno finito senza distorsione*** *di A è la costante non negativa*

$$\gamma_p(A) = \inf\big\{\gamma \in \mathbb{R}_+ \; : \; \text{vale la relazione (2.2)}\big\}.$$

2.2 Stabilità e buona posizione di un problema

Concludiamo questo capitolo discutendo brevemente la differenza, forse sottile ma sicuramente sostanziale, tra un *problema stabile* e un *problema ben posto.*

La Definizione 2.1 afferma che un problema di ingresso-uscita descritto da un operatore $A : L_{pe}^n \to L_{pe}^m$ è *stabile* quando, dato un ingresso $u_0 \in L_p^n$, la corrispondente uscita $y_0 = Au_0$ non può genericamente appartenere ad L_{pe}^m ma deve necessariamente appartenere ad L_p^m. Si noti che questo non assicura che per ogni uscita $y \in L_{pe}^m$ si possa trovare un ingresso $u \in L_{pe}^n$ tale che $y = Au$, né che, fissata una particolare uscita $y_0 \in L_{pe}^m$, un eventuale ingresso $u_0 \in L_{pe}^n$ sia l'unico per cui accade che $y_0 = Au_0$. In altre parole, la stabilità di un operatore A non garantisce né la suriettività né l'iniettività di quest'ultimo.

Viceversa, un problema è *ben posto* quando sono assicurate l'esistenza e l'unicità della soluzione[2] $u \in L_{pe}^n$ dell'equazione $Au = y$ per ogni dato $y \in L_{pe}^m$. Si noti ora che questo non assicura che l'operatore A sia L_p-stabile, ossia non assicura che prendendo $u \in L_p^n$ si trovi corrispettivamente $y \in L_p^m$.

I concetti di stabilità e di buona posizione di un problema sono dunque indipendenti, nel senso che l'uno non pone restrizioni all'altro.

[2]Ed eventualmente la sua dipendenza continua dai dati.

Capitolo 3

Stabilità dei sistemi LTI

Un sistema descritto da un operatore $A : L_{pe}^n \to L_{pe}^m$ è *lineare* quando l'operatore A è lineare, ossia è tale da soddisfare alle due seguenti proprietà:

(i) $A(u_1 + u_2) = Au_1 + Au_2 \quad \forall u_1, u_2 \in L_{pe}^n$;

(ii) $A(\alpha u) = \alpha Au \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in L_{pe}^n$.

Diciamo inoltre che il sistema è *tempo-invariante* se, posto

$$y(t) = A[u(t)],$$

per ogni $t_0 \in \mathbb{R}_+$ vale

$$y(t \pm t_0) = A[u(t \pm t_0)] \tag{3.1}$$

ossia se anticipando o ritardando[1] l'ingresso u di una quantità $t_0 \geq 0$ l'uscita y risulta rispettivamente anticipata o ritardata della medesima quantità.

Ad esempio, il sistema descritto dal problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = u(t), \quad t \geq t_0 \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$$

e avente come uscita

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

è lineare, come subito si verifica grazie all'inizializzazione a zero e alla linearità dell'integrale, e inoltre è tempo-invariante. Se infatti si anticipa l'ingresso u della quantità $t_0 > 0$ si ottiene il nuovo problema di Cauchy

$$\begin{cases} \tilde{y}'(t) = u(t + t_0), \quad t \geq 0 \\ \tilde{y}(0) = 0 \end{cases}$$

con uscita

$$\tilde{y}(t) = \int_{0}^{t} u(\tau + t_0)\, \mathrm{d}\tau$$

[1] Posto $t_0 \geq 0$, in $u(t + t_0)$ si ha un anticipo rispetto a $u(t)$ e in $u(t - t_0)$ un ritardo.

ed è facile verificare che $\tilde{y}(t) = y(t+t_0)$: operando la sostituzione $\tau + t_0 = v$ in quest'ultimo integrale si ricava immediatamente

$$\tilde{y}(t) = \int_{t_0}^{t+t_0} u(v)\,\mathrm{d}v = y(t+t_0).$$

I sistemi lineari tempo-invarianti vengono di solito indicati con la sigla LTI.

3.1 Sistemi SISO

Per il momento limitiamo il nostro studio ai sistemi SISO (*Single-Input Single-Output*), cioè a quelli in cui l'ingresso e l'uscita sono rappresentati da funzioni scalari $u, y \in L_{pe}$. Successivamente estenderemo le definizioni e i risultati qui di seguito esposti ai sistemi MIMO (*Multi-Input Multi-Output*), ovvero i sistemi in cui l'ingresso e l'uscita sono rappresentati rispettivamente da funzioni $u \in L_{pe}^n$ e $y \in L_{pe}^m$, con eventualmente $n \neq m$.

I sistemi lineari tempo-invarianti $y = Au$ di tipo SISO possono essere caratterizzati matematicamente non soltanto dall'operatore A, ma anche da un'importante funzione introdotta nella seguente definizione.

Definizione 3.1. *Dato un sistema LTI $y = Au$ con $A : L_{pe} \to L_{pe}$, si chiama **risposta all'impulso** (o funzione di Green) del sistema la funzione $h(t)$ che soddisfa a*

$$h(t) = (A\delta)(t),$$

dove $\delta(t)$ è la distribuzione (funzione generalizzata) delta di Dirac concentrata in $t = 0$.

In pratica, la risposta all'impulso di un sistema è l'uscita che si ottiene quando si pone in ingresso al sistema la delta di Dirac concentrata nell'origine (detta anche *impulso unitario*).

Ricordiamo che la distribuzione[2] $\delta(t)$ appartiene al duale $\mathcal{D}'(\Omega)$ dello spazio $\mathcal{D}(\Omega)$ delle funzioni test

$$\mathcal{D}(\Omega) = \big\{\varphi \in C^\infty(\Omega) \text{ a supporto compatto in } \Omega\big\},$$

dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, e che la sua azione su un elemento $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ è definita in forma di dualità come

$$_{\mathcal{D}'(\Omega)}\langle \delta_0, \varphi\rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} = \varphi(0) \qquad (0 \in \Omega);$$

analogamente, $\delta(t - t_0) = \delta(t_0 - t)$ rappresenta la distribuzione delta di Dirac concentrata in t_0 e la sua azione su un elemento $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ è definita nuovamente in forma di dualità come

$$_{\mathcal{D}'(\Omega)}\langle \delta_{t_0}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} = \varphi(t_0) \qquad (t_0 \in \Omega).$$

[2] La delta di Dirac non è una funzione, perciò le scritture $\delta(t)$ e $\delta(t - t_0)$ sono soltanto formali; in notazione operatoriale, la delta concentrata in 0 viene più propriamente indicata con δ oppure con δ_0 e, analogamente, la delta concentrata nel generico punto t_0 con δ_{t_0}.

Nel seguito, per un più agevole passaggio dall'ambito distribuzionale a quello funzionale classico e in analogia con quanto avviene per le distribuzioni di tipo funzione[3], converremo di indicare formalmente

$$\int_\Omega \delta(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{def}}{=} {}_{\mathcal{D}'(\Omega)}\langle \delta_0, \varphi\rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} = \varphi(0) \qquad (0 \in \Omega) \tag{3.2}$$

$$\int_\Omega \delta(t-t_0)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{def}}{=} {}_{\mathcal{D}'(\Omega)}\langle \delta_{t_0}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} = \varphi(t_0) \qquad (t_0 \in \Omega) \tag{3.3}$$

in modo da dare senso matematico a scritture del tipo

$$\int_\Omega \delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = 1 \qquad (t_0 \in \Omega),$$

in cui più precisamente si intende ${}_{\mathcal{D}'(\Omega)}\langle \delta_{t_0}, 1\rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} = 1$; porremo inoltre spesso $\Omega = [0, +\infty)$.

La distribuzione $\delta(t)$ è l'elemento neutro per l'operazione di convoluzione[4]; si ha infatti

$$\begin{aligned}(\delta * f)(t) = (f * \delta)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \\ &= {}_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}\langle \delta_t, f\rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R})} = f(t)\end{aligned}$$

e quindi, dato il sistema LTI $y(t) = (Au)(t)$, si può scrivere $u(t) = (\delta * u)(t)$ da cui

$$\begin{aligned}y(t) &= [A(\delta * u)](t) = \\ &= A\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} A[\delta(t-\tau)]u(\tau)\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Dalla Definizione 3.1 si ha $(A\delta)(t) = h(t)$, ma poiché il sistema è tempo-invariante la (3.1) dà $A[\delta(t-\tau)] = h(t-\tau)$ e dunque in definitiva

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau = (h * u)(t).$$

Quindi la risposta $y(t)$ di un sistema LTI all'ingresso $u(t)$ si può ottenere tramite la convoluzione di $u(t)$ con la funzione di Green $h(t)$ del sistema. In questo senso, la risposta all'impulso $h(t)$ assume un'importanza fondamentale nella descrizione di un sistema LTI del tipo $y = Au$, risultando di fatto equivalente all'operatore A.

---

[3] Una distribuzione $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è detta *di tipo funzione* se esiste una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ integrabile sui compatti di Ω tale che

$${}_{\mathcal{D}'(\Omega)}\langle T_f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} = \int_\Omega f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

[4] Non è difficile verificare che l'operazione di convoluzione è commutativa e distributiva.

Notiamo poi che, interessando soltanto il dominio temporale $\Omega = [0, +\infty)$, le funzioni h, u e y possono essere considerate identicamente nulle[5] su $(-\infty, 0)$, il che permette di calcolare l'uscita y tramite l'integrale (non più improprio)

$$y(t) = (h * u)(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{3.4}$$

Questa considerazione conduce infine a introdurre un ulteriore strumento per lo studio dei sistemi LTI: data una funzione $f(t)$ (eventualmente nulla per $t < 0$) trasformabile secondo Laplace, se con

$$\hat{f}(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \quad (s \in \mathbb{C})$$

si indica la sua trasformata di Laplace si ottiene facilmente dalla (3.4)

$$\hat{y}(s) = \hat{h}(s)\hat{u}(s) \tag{3.5}$$

e si può dare la seguente definizione.

Definizione 3.2. *Dato il sistema lineare tempo-invariante $y = Au$ con risposta all'impulso $h(t)$, si chiama **funzione di trasferimento** del sistema la trasformata di Laplace $\hat{h}(s)$ di $h(t)$.*

Nel seguito utilizzeremo le proprietà delle funzioni $h(t)$ e $\hat{h}(s)$ di un sistema LTI per dedurre condizioni necessarie e sufficienti di stabilità L_p.

Esempio

Consideriamo il sistema lineare tempo-invariante descritto dal problema di Cauchy

$$\begin{cases} RCy'(t) + y(t) = u(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

dove R, C sono costanti reali positive. Applicando la trasformata di Laplace a entrambi i membri dell'equazione differenziale otteniamo

$$RC[s\hat{y}(s) - y(0)] + \hat{y}(s) = \hat{u}(s)$$

da cui, imponendo tra l'altro la condizione iniziale data,

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{1+RCs}\hat{u}(s).$$

La funzione di trasferimento del sistema è allora

$$\hat{h}(s) = \frac{1}{1+RCs}$$

[5]Ad ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è possibile far acquisire tale proprietà moltiplicandola per la *funzione di Heaviside* (o *gradino unitario*) $\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0. \end{cases}$

cui, antitrasformando, corrisponde una risposta all'impulso

$$h(t) = \frac{1}{RC} \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \mathcal{U}(t). \ \square$$

Consideriamo un sistema SISO lineare tempo-invariante caratterizzato da una funzione di trasferimento scalare $\hat{h}(s)$. Diamo quindi la seguente definizione.

Definizione 3.3. *Il simbolo $\mathcal{A}$ denota l'insieme delle distribuzioni f tali che $f(t) = 0$ per $t < 0$, aventi la forma*

$$f(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} f_i \delta(t - t_i) + f_a(t) \quad (t \geq 0),$$

dove:

(i) $\{t_i\}_{i=0}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$ *è una successione crescente di elementi non negativi dipendenti da f;*

(ii) $f_a \in L_1$*;*

(iii) $\sum_{i=0}^{+\infty} |f_i| < +\infty$.

Il termine $\sum_{i=0}^{+\infty} f_i \delta(t - t_i)$ è detto la parte distribuzionale di f e il termine $f_a(t)$ la parte misurabile.

La norma $\| \cdot \|_{\mathcal{A}}$ di una distribuzione $f \in \mathcal{A}$ è definita come

$$\|f\|_{\mathcal{A}} = \sum_{i=0}^{+\infty} |f_i| + \|f_a\|_1.$$

La Definizione 3.3 permette di pensare all'insieme $\mathcal{A}$ come allo spazio L_1 completato con la delta di Dirac $\delta(t)$ e le sue traslazioni[6]. In particolare, L_1 risulta un sottoinsieme denso di $\mathcal{A}$ nel senso delle distribuzioni, cioè ogni elemento di $\mathcal{A}$ può essere approssimato arbitrariamente bene da un elemento di L_1 definendo in $\mathcal{A}$ la seguente nozione di *convergenza debole-stella*: una successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ converge a $g \in \mathcal{A}$ se e solo se

$$\lim_{n \to +\infty} {}_{\mathcal{D}'(\Omega)}\langle f_n, \varphi \rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} = {}_{\mathcal{D}'(\Omega)}\langle g, \varphi \rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}([0, +\infty)).$$

Così si può verificare che la successione di funzioni L_1

$$f_n(t) = \begin{cases} n & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } t > \frac{1}{n} \end{cases}$$

converge a $\delta(t)$ in $\mathcal{A}$.

Inoltre, se $f \in L_1$ allora $\|f\|_{\mathcal{A}} = \|f\|_1$ dato che $f \equiv f_a$, ovvero $f_i = 0$ per ogni $i = 0, 1, 2, ...$

[6]Più precisamente i suoi *ritardi*, dato che $t_i \geq 0$ per ogni $i = 0, 1, 2, ...$

Si osservi che, date due distribuzioni $f,\, g \in \mathcal{A}$ della forma

$$f(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} f_i \delta(t - t_i^f) + f_a(t), \qquad g(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} g_i \delta(t - t_i^g) + g_a(t),$$

le convenzioni stabilite dalle (3.2) e (3.3) consentono di calcolare

$$\begin{aligned}\int_0^t f(t-\tau) g(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau &= \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} f_i g_j \delta(t - t_i^f - t_j^g) + \\ &+ \sum_{i=0}^{+\infty} \Big[f_i g_a(t - t_i^f) + g_i f_a(t - t_i^g) \Big] + (f_a * g_a)(t); \end{aligned} \tag{3.6}$$

in analogia con quanto avviene per le funzioni ordinarie si può allora dare la seguente

Definizione 3.4. *La convoluzione di due distribuzioni $f,\, g \in \mathcal{A}$ è data da*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Il prossimo risultato assicura che l'operazione di convoluzione così definita ha perfettamente senso nell'insieme $\mathcal{A}$.

Lemma 3.5. *Siano $f,\, g \in \mathcal{A}$; allora $f * g \in \mathcal{A}$ e inoltre*

$$\|f * g\|_{\mathcal{A}} \leq \|f\|_{\mathcal{A}} \cdot \|g\|_{\mathcal{A}}. \tag{3.7}$$

Dimostrazione. È chiaro che basta provare la disuguaglianza (3.7) per mostrare contemporaneamente che $f * g \in \mathcal{A}$.

Dalla (3.6) e dalla Definizione 3.3 si ha

$$\begin{aligned}\|f * g\|_{\mathcal{A}} = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} |f_i g_j| &+ \\ + \left\| \sum_{i=0}^{+\infty} \Big[f_i g_a(t - t_i^f) + g_i f_a(t - t_i^g) \Big] + (f_a * g_a)(t) \right\|_1 &\leq \\ \leq \left[\sum_{i=0}^{+\infty} |f_i| \right] \cdot \left[\sum_{j=0}^{+\infty} |g_j| \right] + \left\| \sum_{i=0}^{+\infty} f_i g_a(t - t_i^f) \right\|_1 &+ \\ + \left\| \sum_{i=0}^{+\infty} g_i f_a(t - t_i^g) \right\|_1 &+ \|f_a * g_a\|_1 \end{aligned}$$

e inoltre

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{i=0}^{+\infty} f_i g_a(t - t_i^f) \right\|_1 &= \int_0^{+\infty} \left| \sum_{i=0}^{+\infty} f_i g_a(t - t_i^f) \right| \mathrm{d}t \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{+\infty} |f_i| \int_0^{+\infty} \left| g_a(t - t_i^f) \right| \mathrm{d}t = \\ &= \left[\sum_{i=0}^{+\infty} |f_i| \right] \cdot \|g_a\|_1 .\end{aligned}$$

Similmente

$$\left\| \sum_{i=0}^{+\infty} g_i f_a(t - t_i^g) \right\|_1 \leq \left[\sum_{i=0}^{+\infty} |g_i| \right] \cdot \|f_a\|_1$$

e infine

$$\begin{aligned}\|f_a * g_a\|_1 &= \int_0^{+\infty} \left| \int_0^t f_a(t-\tau) g_a(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right| \mathrm{d}t \leq \\ &\leq \int_0^{+\infty} \int_\tau^{+\infty} |f_a(t-\tau) g_a(\tau)|\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\tau = \\ &= \int_0^{+\infty} |g_a(\tau)| \left[\int_\tau^{+\infty} |f_a(t-\tau)|\, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}\tau = \\ &= \left[\int_0^{+\infty} |g_a(\tau)|\, \mathrm{d}\tau \right] \cdot \left[\int_0^{+\infty} |f_a(v)|\, \mathrm{d}v \right] = \|g_a\|_1 \cdot \|f_a\|_1\end{aligned}$$

avendo scambiato l'ordine di integrazione dopo il primo passaggio[7] e operato nell'integrale più interno la sostituzione $t - \tau = v$.

In definitiva si ottiene dunque

$$\begin{aligned}\|f * g\|_{\mathcal{A}} \leq &\left[\sum_{i=0}^{+\infty} |f_i| \right] \cdot \left[\sum_{j=0}^{+\infty} |g_j| \right] + \left[\sum_{i=0}^{+\infty} |f_i| \right] \cdot \|g_a\|_1 + \\ &+ \left[\sum_{i=0}^{+\infty} |g_i| \right] \cdot \|f_a\|_1 + \|g_a\|_1 \cdot \|f_a\|_1 = \\ = &\left\{ \sum_{i=0}^{+\infty} |f_i| + \|f_a\|_1 \right\} \cdot \left\{ \sum_{j=0}^{+\infty} |g_j| + \|g_a\|_1 \right\} = \\ = &\|f\|_{\mathcal{A}} \cdot \|g\|_{\mathcal{A}}\end{aligned}$$

e quindi la tesi. ■

Un caso particolare della (3.7) è quello in cui $f,\, g \in L_1$; poiché si è detto che in tale circostanza vale $\|f\|_{\mathcal{A}} = \|f\|_1$ e analogamente $\|g\|_{\mathcal{A}} = \|g\|_1$, risulta

[7] Ciò è consentito dai teoremi di Fubini e Tonelli, essendo f_a e g_a funzioni assolutamente integrabili su $[0, +\infty)$.

altresì $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$ cioè la convoluzione di due funzioni L_1 è ancora una funzione L_1.

Si osservi poi che se f, $g \in \mathcal{A}$ e almeno una tra f e g non contiene impulsi (ossia è L_1), allora dalla (3.6) risulta che nemmeno $f * g$ contiene impulsi.

Esempio

(i) La funzione $f_1(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathcal{U}(t)$ appartiene a L_1, e quindi anche ad $\mathcal{A}$, per ogni $\alpha > 0$; inoltre

$$\|f_1\|_{\mathcal{A}} = \|f_1\|_1 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}.$$

(ii) La distribuzione

$$f_2(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}\delta(t - nT)$$

con $T \geq 0$ assegnato appartiene ad $\mathcal{A}$ in quanto la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ converge assolutamente al valore $\pi^2/6$; in base alla Definizione 3.3 risulta quindi $\|f_2\|_{\mathcal{A}} = \pi^2/6$.

(iii) La distribuzione

$$f_3(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\delta(t - nT)$$

con $T \geq 0$ assegnato non appartiene ad $\mathcal{A}$ perché la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$ non è assolutamente convergente.

(iv) La distribuzione $f_4(t) = \delta(t) + \mathrm{e}^{-t}\mathcal{U}(t)$ appartiene ad $\mathcal{A}$ e inoltre si ha

$$\|f_4\|_{\mathcal{A}} = 1 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 2. \ \square$$

Accanto all'insieme $\mathcal{A}$ è utile introdurre la sua estensione, definita esattamente come l'estensione L_{pe} degli spazi L_p.

Definizione 3.6. *L'insieme $\mathcal{A}_e$ consiste di tutte le distribuzioni f con la proprietà che ogni loro troncamento f_T appartiene ad $\mathcal{A}$ per ogni $T \geq 0$ fissato. Esso è chiamato l'**estensione** di $\mathcal{A}$.*

In base a questa definizione, una distribuzione f appartiene ad $\mathcal{A}_e$ se e solo se per ogni $T \geq 0$ il suo troncamento f_T si scrive come una funzione di L_1 più eventualmente degli impulsi concentrati in una successione di punti del tipo $\{t_i\}_{i=0}^{+\infty}$. Si osservi che, in particolare, ogni funzione $f \in L_{1e}$ appartiene ad $\mathcal{A}_e$.

L'insieme $\mathcal{A}_e$ si rivela utile in molte questioni di natura applicativa, perché la maggior parte dei sistemi fisici, anche quelli che sono instabili (per lo meno nel senso della Definizione 2.1), sono caratterizzati da risposte all'impulso $h(t)$ appartenenti ad $\mathcal{A}_e$ (come ad esempio $h(t) = \mathrm{e}^t$).

Consideriamo ora una distribuzione $f \in \mathcal{A}$; poiché f_a è L_1, possiamo calcolare la trasformata di Laplace di f, che risulta

$$\begin{aligned}\hat{f}(s) &= \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} f_i\delta(t-t_i) + f_a(t)\right)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} f_i \int_0^{+\infty}\delta(t-t_i)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} f_a(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} f_i\mathrm{e}^{-st_i} + \hat{f}_a(s).\end{aligned}$$

Osserviamo che $\hat{f}$ è certamente definita se $\mathbf{Re}(s) \geq 0$; posto $s = \sigma + \mathrm{i}\omega$ si ha infatti

$$\left|f_i\mathrm{e}^{-st_i}\right| = \left|f_i\mathrm{e}^{-\sigma t_i}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_i}\right| = \left|f_i\mathrm{e}^{-\sigma t_i}\right| \leq |f_i|$$

in quanto $\sigma \geq 0$ e altresì $t_i \geq 0$ per ogni $i = 0, 1, 2, ...$, cosicché $\mathrm{e}^{-\sigma t_i} \leq 1$. Ma allora

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\left|f_i\mathrm{e}^{-st_i}\right| \leq \sum_{i=0}^{+\infty}|f_i| < +\infty,$$

cioè la serie $\sum_{i=0}^{+\infty} f_i\mathrm{e}^{-st_i}$ converge assolutamente e dunque anche semplicemente.

In definitiva, tutti gli elementi di $\mathcal{A}$ sono trasformabili secondo Laplace e la regione di convergenza della loro trasformata di Laplace include il semipiano complesso chiuso $\mathbb{C}_+ = \{s \in \mathbb{C} : \mathbf{Re}(s) \geq 0\}$. Possiamo quindi dare la seguente definizione.

Definizione 3.7. *Il simbolo $\hat{\mathcal{A}}$ denota l'insieme di tutte le funzioni $\hat{f} : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}$ che sono trasformate di Laplace degli elementi di $\mathcal{A}$.*

In base alla Definizione 3.7, dire che una distribuzione f appartiene ad $\mathcal{A}$ è esattamente lo stesso che dire che la sua trasformata di Laplace $\hat{f}$ appartiene ad $\hat{\mathcal{A}}$.

Notiamo ancora per inciso che se $f(t) = \delta(t)$ allora $\hat{f}(s) = 1$ e inoltre che la trasformata di Laplace della distribuzione $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\delta(t)$ con $k \in \mathbb{N}$ è s^k.

Passiamo ora ad esporre i principali risultati di stabilità ingresso-uscita per sistemi LTI di tipo SISO.

Lemma 3.8. *Sia $\hat{f}(s)$ una funzione razionale della forma*

$$\hat{f}(s) = \frac{N(s)}{D(s)},$$

dove $N(s)$ e $D(s)$ sono polinomi in s; allora $\hat{f} \in \hat{\mathcal{A}}$ se e solo se

(i) $\hat{f}$ è propria, cioè $\deg N \leq \deg D$, e

(ii) tutti i poli di $\hat{f}$ hanno parte reale negativa.

Dimostrazione. Mostriamo anzitutto che se una almeno tra le condizioni (i) e (ii) non vale allora $\hat{f} \notin \hat{\mathcal{A}}$.

Supponiamo che $\hat{f}$ non sia propria, cioè che $\deg N > \deg D$; effettuando la divisione tra i polinomi $N(s)$ e $D(s)$ si può allora scrivere

$$\hat{f}(s) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i s^i + \frac{R(s)}{D(s)}$$

dove $k = \deg N - \deg D$, $R(s)$ è un polinomio in s di grado minore di $D(s)$ e $\alpha_i \in \mathbb{C}$ per ogni $i = 0, 1, ..., k$ con $\alpha_k \neq 0$; ne segue che $\hat{f}(s)$ contiene almeno un termine polinomiale del tipo $\alpha_k s^k$ $(k > 0)$ e perciò, antitrasformando, $f(t)$ contiene almeno un termine impulsivo di ordine k del tipo $\alpha_k \delta^{(k)}(t)$. Quindi $f \notin \mathcal{A}$ e dunque $\hat{f} \notin \hat{\mathcal{A}}$.

Supponiamo ora che esista un polo a_0 di $\hat{f}$ con parte reale non negativa. La decomposizione in fratti semplici di $\hat{f}$ contiene certamente il termine

$$\frac{f_0}{s - a_0} \qquad (f_0 \in \mathbb{C})$$

cui, antitrasformando, corrisponde la funzione $f_0 \mathrm{e}^{a_0 t} \mathcal{U}(t)$, che rientra nella parte misurabile di $f(t)$. Poiché $\mathbf{Re}(a_0) \geq 0$, il modulo di tale funzione non è infinitesimo per $t \to +\infty$ e perciò l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \left| f_0 \mathrm{e}^{a_0 t} \right| \, \mathrm{d}t$$

diverge; dunque la parte misurabile di $f(t)$ include almeno un termine che non è L_1, da cui segue $f \notin \mathcal{A}$ e così pure $\hat{f} \notin \hat{\mathcal{A}}$.

Mostriamo ora che se invece le condizioni (i) e (ii) valgono contemporaneamente allora $\hat{f} \in \hat{\mathcal{A}}$.

Posto $\deg D = n$, supponiamo inizialmente che tutti i poli $\{a_i\}_{i=1}^n$ di $\hat{f}$ siano semplici. Essendo per (i) $\deg N \leq \deg D$, mediante la decomposizione in fratti semplici si può mettere $\hat{f}$ nella forma

$$\hat{f}(s) = f_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{s - a_i}$$

dove $f_i \in \mathbb{C}$ per ogni $i = 0, 1, ..., n$; antitrasformando si ricava dunque

$$f(t) = f_0 \delta(t) + \sum_{i=1}^{n} f_i \mathrm{e}^{a_i t} \mathcal{U}(t)$$

e siccome da (ii) segue $\mathbf{Re}(a_i) < 0$ per ogni $i = 1, 2, ..., n$, gli integrali

$$\int_0^{+\infty} \left| f_i \mathrm{e}^{a_i t} \right| \, \mathrm{d}t \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

sono tutti convergenti, cioè $f_i \mathrm{e}^{a_i t} \mathcal{U}(t) \in L_1$ per ogni i. Posto allora

$$f_a(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i \mathrm{e}^{a_i t} \mathcal{U}(t) \in L_1,$$

si ha $f(t) = f_0\delta(t) + f_a(t)$ da cui, in base alla Definizione 3.3, $f \in \mathcal{A}$ ossia $\hat{f} \in \hat{\mathcal{A}}$.

Se esiste in $\hat{f}$ qualche polo a non semplice, diciamo di molteplicità m, allora nella decomposizione in fratti semplici rientrano anche termini del tipo

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{f_j}{(s-a)^j}$$

con $f_j \in \mathbb{C}$ per ogni $j = 1, 2, ..., m$, la cui antitrasformata è

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{f_j}{(j-1)!} t^{j-1} \mathrm{e}^{at} \mathcal{U}(t);$$

ora, poiché $\mathbf{Re}(a) < 0$, risulta

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{f_j}{(j-1)!} t^{j-1} \mathrm{e}^{at} \right| \mathrm{d}t = \frac{|f_j|}{|\mathbf{Re}(a)|^j} < +\infty$$

e dunque $f \in \mathcal{A}$, ovvero $\hat{f} \in \hat{\mathcal{A}}$ anche in questo caso. ■

Le funzioni di trasferimento razionali rivestono un ruolo particolare nello studio della stabilità ingresso-uscita: si può mostrare che

Teorema 3.9. *Se un sistema LTI è caratterizzato da una funzione di trasferimento $\hat{h}(s)$ razionale che soddisfa alle condizioni espresse dal Lemma 3.8, allora esso è L_∞-stabile*[8]*.* ■

In precedenza abbiamo trovato che per un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t)$ l'uscita $y(t)$ corrispondente a un ingresso $u(t)$ è data da $y(t) = (h * u)(t)$; se denotiamo

$$(Hu)(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{3.8}$$

si vede che H rappresenta l'*operatore ingresso-uscita* con cui si può descrivere il comportamento del sistema. Vale in proposito il seguente importante risultato.

Teorema 3.10. *Si consideri l'operatore H definito dalla (3.8) e si supponga che $h \in \mathcal{A}_e$. Sono allora fatti equivalenti:*

(i) H è L_1-stabile senza distorsione.

(ii) H è L_∞-stabile senza distorsione.

(iii) H è L_p-stabile senza distorsione per ogni $p \in [1, +\infty]$.

(iv) $h \in \mathcal{A}$.

Inoltre, se $h \in \mathcal{A}$ si ha

$$\|Hu\|_p \le \|h\|_{\mathcal{A}} \cdot \|u\|_p \quad \forall p \in [1, +\infty].$$

[8]Un sistema L_∞-stabile è anche detto BIBO (*Bounded-Input Bounded-Output*).

Dimostrazione. Mostriamo anzitutto che (iv) implica (i), (ii) e (iii): supponiamo dunque $h \in \mathcal{A}$.

(iv)⇒(i) Se $u \in L_1$ allora $u \in \mathcal{A}$ e inoltre $\|u\|_{\mathcal{A}} = \|u\|_1$ in quanto u non contiene termini impulsivi. Ma allora per il Lemma 3.5 si ha $h * u = Hu \in \mathcal{A}$ e inoltre

$$\|Hu\|_{\mathcal{A}} \leq \|h\|_{\mathcal{A}} \cdot \|u\|_{\mathcal{A}} = \|h\|_{\mathcal{A}} \cdot \|u\|_1.$$

Ora, poiché u non contiene impulsi, la (3.6) assicura che nemmeno $h * u$ ne contiene e quindi più precisamente $Hu \in L_1$ con $\|Hu\|_1 = \|Hu\|_{\mathcal{A}}$, da cui

$$\|Hu\|_1 \leq \|h\|_{\mathcal{A}} \cdot \|u\|_1;$$

perciò H è L_1-stabile senza distorsione con $\gamma = \|h\|_{\mathcal{A}}$.

(iv)⇒(ii) Supponiamo $u \in L_\infty$ e scriviamo $h \in \mathcal{A}$ nella forma

$$h(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} h_i \delta(t - t_i) + h_a(t); \tag{3.9}$$

allora, tenendo conto che u non contiene termini impulsivi e usando ancora la (3.6),

$$\begin{aligned}
|(h * u)(t)| &\leq \sum_{i=0}^{+\infty} |h_i| \cdot |u(t - t_i)| + \int_0^t |h_a(\tau)| \cdot |u(t - \tau)| \,\mathrm{d}\tau \leq \\
&\leq \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0,+\infty)} |u(t)| \cdot \left[\sum_{i=0}^{+\infty} |h_i| + \int_0^{+\infty} |h_a(\tau)| \,\mathrm{d}\tau \right] = \\
&= \|u\|_\infty \cdot \|h\|_{\mathcal{A}}
\end{aligned}$$

che vale per quasi ogni $t \in [0, +\infty)$. Allora

$$\|Hu\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0,+\infty)} |(h * u)(t)| \leq \|h\|_{\mathcal{A}} \cdot \|u\|_\infty$$

il che mostra come H sia L_∞-stabile senza distorsione con $\gamma = \|h\|_{\mathcal{A}}$.

(iv)⇒(iii) Scritta $h \in \mathcal{A}$ secondo la (3.9), osserviamo anzitutto che valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
\|h_a\|_1 &= \int_0^{+\infty} |h_a(r)| \,\mathrm{d}r = \\
&= -\int_t^{-\infty} |h_a(t - \tau)| \,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^t |h_a(t - \tau)| \,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

avendo effettuato, a $t \geq 0$ fissato, la sostituzione $r = t - \tau$; conseguentemente

$$\int_0^t |h_a(t - \tau)| \,\mathrm{d}\tau \leq \|h_a\|_1.$$

Inoltre, ricordando che $t_i \geq 0$ per ogni i:

$$\begin{aligned}\int_0^t |h(t-\tau)| \,\mathrm{d}\tau &= \int_0^t \left| \sum_{i=0}^{+\infty} h_i \delta(t-t_i-\tau) + h_a(t-\tau) \right| \mathrm{d}\tau \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{+\infty} |h_i| \int_0^t \delta(t-t_i-\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t |h_a(t-\tau)|\,\mathrm{d}\tau \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{+\infty} |h_i| \int_0^{+\infty} \delta(t-t_i-\tau)\,\mathrm{d}\tau + \|h_a\|_1 = \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} |h_i| + \|h_a\|_1 = \|h\|_{\mathcal{A}}\end{aligned} \tag{3.10}$$

e infine

$$\begin{aligned}\int_\tau^{+\infty} |h(t-\tau)|\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} |h(r)|\,\mathrm{d}r = \\ &= \int_0^{+\infty} \left| \sum_{i=0}^{+\infty} h_i \delta(r-t_i) + h_a(r) \right| \mathrm{d}r \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{+\infty} |h_i| \int_0^{+\infty} \delta(r-t_i)\,\mathrm{d}r + \int_0^{+\infty} |h_a(r)|\,\mathrm{d}r = \|h\|_{\mathcal{A}}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Proviamo ora che se $h \in \mathcal{A}$ allora H è L_p-stabile senza distorsione per ogni $p \in [1, +\infty]$. Come già dimostrato, la proprietà è vera per $p = 1$ e per $p = +\infty$ e quindi possiamo fissare $p \in (1, +\infty)$; prendiamo inoltre $q \in (1 + \infty)$ in modo che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

e sia $u \in L_p$. Si ha:

$$\begin{aligned}|(Hu)(t)| &\leq \int_0^t |h(t-\tau)u(\tau)|\,\mathrm{d}\tau = \\ &= \int_0^t \big|h(t-\tau)\big|^{\frac{1}{q}} \big|h(t-\tau)\big|^{\frac{1}{p}} \cdot |u(\tau)|\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

e dunque, usando la disuguaglianza di Hölder con indici p e q,

$$|(Hu)(t)| \leq \left[\int_0^t |h(t-\tau)|\,\mathrm{d}\tau \right]^{\frac{1}{q}} \cdot \left[\int_0^t |h(t-\tau)| \cdot |u(\tau)|^p\,\mathrm{d}\tau \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Elevando a p entrambi i membri e ricordando la (3.10) si ottiene così

$$|(Hu)(t)|^p \leq \|h\|_{\mathcal{A}}^{p/q} \int_0^t |h(t-\tau)| \cdot |u(\tau)|^p\,\mathrm{d}\tau$$

da cui

$$\begin{aligned}\|Hu\|_p^p &= \int_0^{+\infty} |(Hu)(t)|^p \,\mathrm{d}t \leq \\ &\leq \|h\|_{\mathcal{A}}^{p/q} \int_0^{+\infty} \int_0^t |h(t-\tau)| \cdot |u(\tau)|^p \,\mathrm{d}\tau \,\mathrm{d}t = \\ &= \|h\|_{\mathcal{A}}^{p/q} \int_0^{+\infty} |u(\tau)|^p \left[\int_\tau^{+\infty} |h(t-\tau)| \,\mathrm{d}t \right] \mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

e infine, per la (3.11),

$$\begin{aligned}\|Hu\|_p^p &\leq \|h\|_{\mathcal{A}}^{p/q+1} \int_0^{+\infty} |u(\tau)|^p \,\mathrm{d}\tau \leq \\ &\leq \|h\|_{\mathcal{A}}^p \cdot \|u\|_p^p\end{aligned}$$

avendo osservato che $\frac{p}{q} + 1 = p\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p}\right) = p$. Risulta dunque, elevando a $\frac{1}{p}$ ambo i membri,

$$\|Hu\|_{\mathcal{A}} \leq \|h\|_{\mathcal{A}} \cdot \|u\|_p$$

e perciò H è L_p-stabile senza distorsione con $\gamma = \|h\|_{\mathcal{A}}$ per ogni p.

Mostriamo ora le implicazioni inverse.

(i)⇒(iv) Se H è L_1-stabile senza distorsione, cioè se esiste una costante $\gamma \in \mathbb{R}_+$ tale che $\|Hu\|_1 \leq \gamma \|u\|_1$ per ogni $u \in L_1$, allora H è limitato e dunque, essendo lineare, anche continuo da L_1 in sé; poiché L_1 è denso in $\mathcal{A}$, esiste un unico prolungamento continuo di H a tutto $\mathcal{A}$, ragion per cui si può asserire per estensione che H manda $\mathcal{A}$ in sé. Si prenda allora $u(t) = \delta(t)$; evidentemente $(H\delta)(t) = h(t)$ per definizione e allora, per quanto appena detto, dev'essere $h \in \mathcal{A}$.

(ii)⇒(iv) Consideriamo il particolare operatore H in cui $h_i = 0$ per ogni i, in modo che si abbia $h(t) = h_a(t)$ e mostriamo che se $h \notin \mathcal{A}$ (cioè $h_a \notin L_1$) allora il rapporto $\|Hu\|_\infty / \|u\|_\infty$ può essere reso arbitrariamente grande.

A questo scopo, notiamo anzitutto che chiedere $h_a \in L_1$ equivale a chiedere che

$$\sup_{t \geq 0} \int_0^t |h_a(t-\tau)| \,\mathrm{d}\tau < +\infty,$$

perciò se supponiamo $h_a \notin L_1$ la funzione

$$\psi(t) = \int_0^t |h_a(t-\tau)| \,\mathrm{d}\tau$$

risulta illimitata superiormente; fissato dunque $k \geq 0$ esiste $t_0 \geq 0$ tale che $\psi(t_0) \geq k$.

Si consideri ora in ingresso al sistema la funzione $u(t) = \operatorname{sgn}[h_a(t_0 - t)]$; evidentemente $u \in L_\infty$ con $\|u\|_\infty = 1$ e tuttavia

$$\begin{aligned}(Hu)(t_0) &= \int_0^{t_0} h_a(t_0-\tau) \operatorname{sgn}[h_a(t_0-\tau)] \,\mathrm{d}\tau = \\ &= \int_0^{t_0} |h_a(t_0-\tau)| \,\mathrm{d}\tau = \psi(t_0) \geq k\end{aligned}$$

da cui

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} |(Hu)(t)| \geq k;$$

per l'arbitrarietà di k si ha la tesi.

Questa argomentazione lascia per la verità aperta la possibilità che H sia L_∞-stabile benché non L_∞-stabile sd; tuttavia si può mostrare che per operatori della forma (3.8) la L_∞-stabilità e la L_∞-stabilità sd sono proprietà equivalenti, perciò la dimostrazione può ritenersi completa.

(iii)⇒(iv) Supponiamo che H sia L_p-stabile sd per ogni $p \in [1,+\infty]$; allora H è in particolare L_1-stabile sd e questo, come si è già visto, implica $h \in \mathcal{A}$. ■

Il Teorema 3.10 mostra tutta l'importanza dell'insieme $\mathcal{A}$, in quanto consente di dedurre immediatamente la seguente proprietà.

Corollario 3.11. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema LTI descritto da un operatore ingresso-uscita della forma (3.8) sia L_p-stabile senza distorsione per ogni $p \in [1,+\infty]$ è che la sua risposta all'impulso $h(t)$ appartenga all'insieme $\mathcal{A}$.* ■

Ciò giustifica il fatto che spesso $\mathcal{A}$ venga descritto come l'insieme delle risposte all'impulso stabili (o BIBO-stabili).

Notiamo che il Teorema 3.10 permette altresì di dedurre che, qualora $h \in \mathcal{A}$, il guadagno finito senza distorsione $\gamma_p(H)$ dell'operatore H soddisfa in generale

$$\gamma_p(H) \leq \|h\|_{\mathcal{A}}; \tag{3.12}$$

in realtà si può dimostrare che questa maggiorazione è esatta se $p = 1$ e se $p = +\infty$, avendosi $\gamma_1(H) = \gamma_\infty(H) = \|h\|_{\mathcal{A}}$. Inoltre si dispone di un risultato preciso anche per il caso $p = 2$, espresso dal seguente Teorema.

Teorema 3.12. *Si consideri l'operatore H definito dalla (3.8), con $h \in \mathcal{A}$. Allora H è L_2-stabile senza distorsione e inoltre*

$$\gamma_2(H) = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} |\hat{h}(\mathrm{i}\omega)|. \tag{3.13}$$

Dimostrazione. Prima di procedere nella dimostrazione notiamo che qualora una funzione $f(t)$ sia identicamente nulla per $t < 0$ e inoltre ammetta entrambe le trasformate di Fourier e di Laplace, la prima di queste è data da

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

e può essere dedotta dalla seconda come $\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \hat{f}(\mathrm{i}\omega)$.

Posto allora $y = h * u$, si ha

$$\hat{y}(\mathrm{i}\omega) = \hat{h}(\mathrm{i}\omega)\hat{u}(\mathrm{i}\omega)$$

e dunque, usando l'identità di Parseval,

$$\begin{aligned}\|y\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\|\mathcal{F}y\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{y}(\mathrm{i}\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{h}(\mathrm{i}\omega)|^2 \cdot |\hat{u}(\mathrm{i}\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega = \\ \le \sup_{\omega\in\mathbb{R}} |\hat{h}(\mathrm{i}\omega)|^2 \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}(\mathrm{i}\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega = \\ = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} |\hat{h}(\mathrm{i}\omega)|^2 \cdot \frac{1}{2\pi}\|\mathcal{F}u\|_2^2 = \\ = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} |\hat{h}(\mathrm{i}\omega)|^2 \cdot \|u\|_2^2 = \left(\sup_{\omega\in\mathbb{R}} |\hat{h}(\mathrm{i}\omega)| \cdot \|u\|_2\right)^2\end{aligned}$$

da cui

$$\|y\|_2 \le \sup_{\omega\in\mathbb{R}} |\hat{h}(\mathrm{i}\omega)| \cdot \|u\|_2.$$

Ciò mostra che $\gamma_2(H) \le \sup_{\omega\in\mathbb{R}} |\hat{h}(\mathrm{i}\omega)|$.

Per provare la disuguaglianza opposta si consideri l'operatore

$$\begin{aligned}\widetilde{H} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}) \\ u(t) \mapsto \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

con $u \in L_2(\mathbb{R})$. Esso risulta un'estensione allo spazio $L_2(\mathbb{R})$ dell'operatore H definito dalla (3.8) ed è possibile mostrare[9] che $\gamma_p(\widetilde{H}) = \gamma_p(H)$ per ogni $p \in [1, +\infty]$, quindi in particolare che $\gamma_2(\widetilde{H}) = \gamma_2(H)$.

Posto per comodità

$$c_2 = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} |\hat{h}(\mathrm{i}\omega)|,$$

si fissi $\epsilon > 0$ e sia $\omega_0 \in \mathbb{R}$ tale che $|\hat{h}(\mathrm{i}\omega_0)| > c_2 - \epsilon$; per proprietà della trasformata di Fourier, $\hat{h}(-\mathrm{i}\omega_0)$ è il complesso coniugato di $\hat{h}(\mathrm{i}\omega_0)$ e quindi $|\hat{h}(-\mathrm{i}\omega_0)| = |\hat{h}(\mathrm{i}\omega_0)|$.

Si prenda ora

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 + \mathrm{e}^{-2\sigma^2\omega_0^2}} \in \mathbb{R}$$

con $\sigma > 0$ e si consideri l'ingresso

$$u_\sigma(t) = \frac{1}{\alpha\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{4\sigma^2}}\cos(\omega_0 t) \in L_2(\mathbb{R});$$

risulta allora $\|u_\sigma\|_{L_2(\mathbb{R})} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |u_\sigma(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = 1$ e inoltre

$$\hat{u}_\sigma(\mathrm{i}\omega) = \frac{\sqrt[4]{8\pi\sigma^2}}{2\alpha}\left[\mathrm{e}^{-\sigma^2(\omega-\omega_0)^2} + \mathrm{e}^{-\sigma^2(\omega+\omega_0)^2}\right],$$

da cui si vede che lasciando $\sigma \to +\infty$ è possibile concentrare lo spettro $|\hat{u}_\sigma(\mathrm{i}\omega)|^2$ di $u_\sigma(t)$ intorno ai due valori $\pm\omega_0$. Nel senso delle distribuzioni si ha infatti

$$\lim_{\sigma\to+\infty} |\hat{u}_\sigma(\mathrm{i}\omega)|^2 = \pi[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)]$$

[9] Per la dimostrazione di questa proprietà si veda [2], Lemma 3.55.

e dunque, usando nuovamente l'identità di Parseval,

$$\begin{aligned}\lim_{\sigma\to+\infty}\|\widetilde{H}u_\sigma\|^2_{L_2(\mathbb{R})} &= \lim_{\sigma\to+\infty}\|\mathcal{F}(\widetilde{H}u_\sigma)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{h}(\mathrm{i}\omega)|^2\cdot\lim_{\sigma\to+\infty}|\hat{u}_\sigma(\mathrm{i}\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega = \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{h}(\mathrm{i}\omega)|^2\delta(\omega-\omega_0)\,\mathrm{d}\omega + \int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{h}(\mathrm{i}\omega)|^2\delta(\omega+\omega_0)\,\mathrm{d}\omega\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(|\hat{h}(\mathrm{i}\omega_0)|^2+|\hat{h}(-\mathrm{i}\omega_0)|^2\right) = |\hat{h}(\mathrm{i}\omega_0)|^2.\end{aligned}$$

Allora

$$\lim_{\sigma\to+\infty}\|\widetilde{H}u_\sigma\|_{L_2(\mathbb{R})} = |\hat{h}(\mathrm{i}\omega_0)| > c_2-\epsilon$$

e ciò indica che è possibile scegliere un valore $\overline{\sigma}$ finito tale che

$$\|\widetilde{H}u_{\overline{\sigma}}\|_{L_2(\mathbb{R})} > c_2-\epsilon.$$

Dall'arbitrarietà di ϵ segue quindi

$$\|\widetilde{H}u_{\overline{\sigma}}\|_{L_2(\mathbb{R})} \geq c_2,$$

cioè $\gamma_2(\widetilde{H}) = \gamma_2(H) \geq \sup_{\omega\in\mathbb{R}}|\hat{h}(\mathrm{i}\omega)|$, il che completa la dimostrazione. ■

3.2 Sistemi MIMO

Estendiamo ora brevemente i risultati della precedente sezione ai sistemi MIMO (*Multi-Input Multi-Output*).

Si consideri dunque un sistema con n ingressi ed m uscite, descritto dall'operatore ingresso-uscita $\mathbf{H}$ così definito:

$$(\mathbf{H}u)(t) = \int_0^t H(t-\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{3.14}$$

dove $H\in\mathcal{A}_e^{m\times n}$ è la *matrice di risposta all'impulso* del sistema. In analogia con quanto fatto precedentemente, chiameremo *matrice di trasferimento* del sistema la trasformata di Laplace $\widehat{H}(s)$ di $H(t)$.

I criteri per la stabilità L_p dei sistemi MIMO sono, com'è facile intuire dalla forma dell'operatore (3.14), del tutto analoghi a quelli validi per i sistemi SISO. Essi sono espressi dal seguente

Teorema 3.13. *Si consideri l'operatore* $\mathbf{H}$ *definito dalla (3.14) con* $H\in\mathcal{A}_e^{m\times n}$. *Sono allora fatti equivalenti:*

(i) $\mathbf{H}$ *è* L_1*-stabile senza distorsione.*

(ii) $\mathbf{H}$ *è* L_∞*-stabile senza distorsione.*

(iii) $\mathbf{H}$ *è* L_p*-stabile senza distorsione per ogni* $p\in[1,+\infty]$.

(iv) $H\in\mathcal{A}^{m\times n}$. ■

La dimostrazione di questo Teorema è omessa in quanto del tutto parallela a quella del Teorema 3.10.

Anche per i sistemi MIMO è possibile ottenere un utile risultato relativo al guadagno finito senza distorsione dell'operatore $\mathbf{H}$.

Teorema 3.14. *Si consideri un operatore della forma (3.14) con $H \in \mathcal{A}^{m\times n}$. Allora*

$$\gamma_p(\mathbf{H}) \leq \|M_1\| \tag{3.15}$$

dove $\|\cdot\|$ denota la norma matriciale indotta dalla norma euclidea dei vettori ed M_1 è una matrice in $\mathbb{R}^{m\times n}$ in cui l'elemento di posto (i,j) è $\|h_{ij}\|_{\mathcal{A}}$; quindi

$$\|M_1\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\|h_{ij}\|_{\mathcal{A}}^2}.$$

Se $p = 2$ allora vale

$$\gamma_2(\mathbf{H}) = \|M_2\| \tag{3.16}$$

dove M_2 è una matrice in $\mathbb{R}^{m\times n}$ in cui l'elemento di posto (i,j) è dato da

$$(M_2)_{ij} = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} |\hat{h}_{ij}(\mathrm{i}\omega)|. \ \blacksquare$$

Si noti che nel caso in cui $n = m = 1$, cioè se il sistema è SISO, le (3.15) e (3.16) si riducono rispettivamente alle (3.12) e (3.13).

Molti dei sistemi LTI di tipo MIMO che si incontrano nelle applicazioni sono suscettibili della seguente rappresentazione

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = 0 \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{3.17}$$

dove $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^q$ è la variabile di stato[10], $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ e $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$ rappresentano al solito rispettivamente l'ingresso e l'uscita e infine A, B, C sono matrici costanti con in particolare

$$A \in \mathbb{R}^{q\times q}, \qquad B \in \mathbb{R}^{q\times n}, \qquad C \in \mathbb{R}^{m\times q}.$$

Grazie alla formula di Lagrange della variazione delle costanti, è possibile descrivere il sistema (3.17) per mezzo di un operatore ingresso-uscita del tipo (3.14): si ha

$$y(t) = \int_0^t C\mathrm{e}^{(t-\tau)A}Bu(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{3.18}$$

da cui si vede che la matrice di risposta all'impulso è

$$H(t) = C\mathrm{e}^{tA}B;$$

[10] Per un rapido richiamo della nozione di stato di un sistema si veda l'introduzione del capitolo 4.

essa appartiene a $\mathbb{R}^{m\times n}$ per ogni $t \geq 0$ fissato. Inoltre, applicando la trasformata di Laplace a entrambi i membri di (3.17) si ricava la relazione

$$\hat{y}(s) = C(sI - A)^{-1}B\hat{u}(s),$$

dove $I \in \mathbb{R}^{q\times q}$ è la matrice identica di ordine q; si riconosce così che

$$\widehat{H}(s) = C(sI - A)^{-1}B \tag{3.19}$$

è la matrice di trasferimento del sistema.

Vale in proposito il seguente risultato, che non dimostriamo.

Teorema 3.15. *Il sistema LTI* (3.17) *rappresentato dall'operatore ingresso-uscita* (3.18) *è L_∞-stabile se e solo se tutti i poli della matrice di trasferimento $\widehat{H}(s)$ definita da* (3.19) *hanno parte reale negativa.* ■

I poli di $\widehat{H}(s)$ sono tutti i valori $s \in \mathbb{C}$ che rendono la matrice di trasferimento non definita; in particolare, essendo B, C matrici costanti, sono tutti gli s complessi per i quali la matrice $sI - A$ non è invertibile. Essi coincidono dunque con gli autovalori della matrice A.

Capitolo 4

Stabilità dei sistemi non lineari

Per trattare la stabilità ingresso-uscita dei sistemi non lineari è necessario recuperare almeno in parte la nozione di *stato*, cui finora non si è fatto che qualche sporadico riferimento.

Lo stato di un sistema è descritto dalle cosiddette *variabili di stato*, ossia funzioni del tempo solitamente indicate con $x(\cdot)$; queste funzioni sono anche chiamate *traiettorie* del sistema. Le variabili di stato possono essere pensate come intermedie tra l'ingresso e l'uscita, nel senso che sono influenzate dal primo e determinano direttamente la seconda. Tuttavia, a differenza dell'ingresso e dell'uscita, esse spesso non hanno un evidente significato fisico, il che ne rende generalmente difficile l'identificazione; inoltre, la funzione $x(t)$ che rappresenta l'evoluzione dello stato non è, in linea di principio, accessibile all'osservatore, il quale può misurare soltanto gli ingressi e le uscite[1]. Per questi motivi conviene a volte vedere le variabili di stato come astrazioni matematiche facenti parte del modello adottato.

Ad esempio, il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + u(t) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

dove x, $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, in corrispondenza dell'ingresso $u(t)$ ammette lo stato[2]

$$x(t) = \mathrm{e}^{tA}x_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)A}u(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Questa non è però in generale l'uscita misurata dall'osservatore, la quale dipende invece dallo stato attraverso una funzione $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ detta *funzione di osservazione*; si pone cioè

$$y = O \circ x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$$

[1]In alcuni casi speciali sussiste la possibilità, almeno teorica, di calcolare la traiettoria $x(t)$; il sistema è allora detto *osservabile*.

[2]Quando ha interesse evidenziare la dipendenza dello stato $x(t)$ dalla condizione iniziale x_0 si usa la notazione $x(t, x_0)$; quindi, $x(t, x_0)$ denota la soluzione di (4.1) tale che $x(0, x_0) = x_0$.

e la (4.1) va quindi modificata come segue:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + u(t) \\ x(0) = x_0 \\ y(t) = O(x(t)). \end{cases}$$

Ora il sistema può essere interamente descritto dalla relazione

$$y(t) = O\left(\mathrm{e}^{tA}x_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)A}u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right),$$

che è di tipo ingresso-uscita e non fa intervenire lo stato. Si noti che $y \equiv x$, cioè lo stato del sistema è direttamente disponibile all'osservatore, solo nel caso in cui O sia la funzione identica.

4.1 Stabilità L_p per piccoli segnali

La nozione di stato, rispetto ad una rappresentazione ingresso-uscita, rende più agevole la trattazione dell'*equilibrio* dei sistemi. Richiamiamo qui di seguito alcune nozioni in proposito, utili per affrontare l'argomento principale di questo capitolo.

Definizione 4.1. *Si consideri il sistema*

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{4.2}$$

con $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*; si dice che un punto* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *è di* ***equilibrio*** *per* (4.2) *se risulta* $x(t, x_0) = x_0$ *per ogni* $t \geq 0$.

Si dice inoltre che x_0 *è un punto di* ***equilibrio stabile*** *per* (4.2) *se*

$$\forall \epsilon > 0,\, \exists \delta > 0 \,:\, \|\xi - x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t, \xi) - x_0\| < \epsilon \;\; \forall t \geq 0,$$

dove $\xi \in \mathbb{R}^n$ *e* $\|\cdot\|$ *indica la norma euclidea di un elemento di* $\mathbb{R}^n$.

Se esiste in $\mathbb{R}^n$ *un intorno* $\mathcal{B}_{\delta_0}(x_0)$ *di* x_0 *di raggio* $\delta_0 > 0$ *tale che*

$$\lim_{t \to +\infty} x(t, \xi) = x_0$$

per ogni $\xi \in \mathcal{B}_{\delta_0}(x_0)$*, si dice che* x_0 *è un punto di* ***equilibrio attrattivo*** *per* (4.2).

Se x_0 *è un punto di equilibrio contemporaneamente stabile e attrattivo per* (4.2)*, esso è detto* ***asintoticamente stabile****.*

Se x_0 *è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per* (4.2) *con inoltre* $\mathcal{B}_{\delta_0}(x_0) = \mathbb{R}^n$*, si dice che* x_0 *è* ***globalmente asintoticamente stabile****.*

Se infine esistono due costanti M, α *positive tali che*

$$\|x(t, \xi) - x_0\| < M\mathrm{e}^{-\alpha t} \quad \textit{per ogni } \xi \in \mathcal{B}_{\delta_0}(x_0),$$

si parla di ***stabilità esponenziale*** *dell'equilibrio.*

Dalla prima parte di questa definizione si deduce che i punti di equilibrio di un sistema del tipo (4.2) sono le soluzioni dell'equazione algebrica

$$f(x) = 0.$$

Consideriamo ora un sistema non lineare della forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ y(t) = g(t, x(t), u(t)) \end{cases} \tag{4.3}$$

con $t \geq 0$; siano inoltre

$$f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q, \qquad g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

due funzioni tali che

$$f(t, 0, 0) \equiv 0, \qquad g(t, 0, 0) \equiv 0$$

in modo che $x_0 = 0$ sia una posizione di equilibrio per il sistema non forzato

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), 0). \tag{4.4}$$

Diciamo che f, g sono localmente lipschitziane in $(0, 0) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n$ se esistono due costanti positive k_f, k_g e un intorno $\mathcal{B}_r(0)$ di $0 \in \mathbb{R}^{q+n}$ di raggio $r > 0$ tali che

$$\begin{aligned} \|f(t, x_2, y_2) - f(t, x_1, y_1)\| &\leq k_f(\|x_2 - x_1\| + \|y_2 - y_1\|) \\ \|g(t, x_2, y_2) - g(t, x_1, y_1)\| &\leq k_g(\|x_2 - x_1\| + \|y_2 - y_1\|) \end{aligned}$$

per ogni (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \mathcal{B}_r(0)$ e per ogni $t \geq 0$.

Diamo quindi la seguente definizione.

Definizione 4.2. *Si dice che il sistema* (4.3) *è* ***L_p-stabile senza distorsione per piccoli segnali*** *se esiste una costante γ_p positiva tale che, posto $x(0) = 0$ e scelto un ingresso $u(t)$ la cui norma $\|u(t)\|$ si mantiene limitata quasi ovunque su $[0, +\infty)$, si abbia*

$$u \in L_p^n \Rightarrow y \in L_p^m$$

con inoltre

$$\|y\|_p \leq \gamma_p \|u\|_p.$$

Possiamo ora concludere enunciando le condizioni di stabilità L_p per i sistemi non lineari.

Teorema 4.3. *Si supponga che $x_0 = 0$ sia una posizione di equilibrio esponenzialmente stabile per il sistema* (4.4)*, che la funzione f sia di classe C^1 sul suo dominio e inoltre che f, g siano localmente lipschitziane in $(0, 0) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n$.*

Allora il sistema (4.3) *è L_p-stabile senza distorsione per piccoli segnali per ogni $p \in [1, +\infty]$.* ■

Teorema 4.4. *Si supponga che $x_0 = 0$ sia una posizione di equilibrio globalmente esponenzialmente stabile per il sistema* (4.4)*, che la funzione f sia di classe C^1 sul suo dominio e inoltre che f, g siano lipschitziane su tutto $\mathbb{R}^{q+n}$, uniformemente in t.*

Allora il sistema (4.3) *è L_p-stabile senza distorsione per ogni $p \in [1, +\infty]$.* ■

Bibliografia

[1] Vidyasagar M., *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice Hall, 1993

[2] Vidyasagar M., *Input-Output Analysis of Large-Scale Interconnected Systems*, Springer-Verlag, 1981

[3] Bacciotti A., *Teoria matematica dei controlli*, Celid, 1998