ESTUDIO EXPERIMENTAL SOBRE LAS TRANSICIONES ENTRE LOS MODOS DE FALLO EN VIGAS DE HORMIGÓN ARMADO SIN CERCOS

A. Carpinteri [1], **J. R. Carmona** [2], **G. Ventura** [1]

[1] Dept. Structural and Geothechnical Engineering, Politecnico di Torino,
Corso Duca degli Abruzzi, 24, 10129, Torino, Italy
[2] E.T.S. de Ingenieros de Caminos,
Canales y Puertos, Universidad de Castilla la Mancha
Avenida Camilo José Cela s/n, 13071 Ciudad Real
E-mail: jacinto.ruiz@uclm.es

RESUMEN

El presente articulo muestra los resultados de una reciente campaña experimental diseñada con el objeto de investigar la relación entre la propagación de las fisuras y el tipo de fallo en vigas de hormigón armado sin cercos. Se realiza un análisis de la forma, extensión y posición de inicio de la fisura que durante su desarrollo provoca el fallo del elemento de hormigón. Se han ensayado 16 vigas de geometría similar y armadas con 4 cuantías de armado diferentes. Se ensayaron 4 vigas de cada tipo. Los resultados experimentales son analizados con la ayuda del modelo denominado "Bridged Crack Model". El modelo de forma sencilla permite estudiar de forma analítica la transición entre los diferentes modos de fallos y como afecta el tamaño de los elementos de hormigón. Se pretende establecer de forma racional y contrastada experimentalmente un modelo que de forma sencilla permita explicar la relación entre los diferentes procesos de fisuración que tienen lugar en las vigas de hormigón armado sin cercos y los modos de fallo.

ABSTRACT

This paper presents the results of a recent experimental research program aimed at investigating the relation between cracking processes and failure mode and at the validation of a recently developed mechanical model. In the analysis of the experimental results, a special emphasis is given to the the shape, extension and initial location of the failure crack and their relation to the rupture mode of the reinforced concrete beam. The experimental program investigated five different reinforcement percentages with four samples each, for a total of 16 beams subjected to three point bending test. The experimental results are discussed with the help of the bridged crack model. The model unifies the theoretical treatment of yielding, shear and crushing failures to predict collapse mode transitions and related size effects, and the experimental program is targeted to validating and discussing the choice of some model parameters.

ÁREAS TEMÁTICAS PROPUESTAS: Fracture of materials (Concrete)/ experimental techniques

PALABRAS CLAVE: Hormigón armado, modos de fallo, efecto de escala

1. INTRODUCCIÓN

En elementos de hormigón armado durante el proceso de carga diferentes procesos de fisuración tienen lugar. La trayectoria de las fisuras y su longitud van a definir el tipo de fallo; por ejemplo en vigas sometidas a flexión en tres puntos las primeras fisuras se forman en las regiones de máximo momento flector, en la cara donde las tensiones de tracción son mayores. Estas fisuras de flexión han sido ampliamente estudiadas, sobre todo en el caso de de las vigas débilmente armadas, donde su formación y progreso esta relacionado con la cuantía mínima de armadura a disponer para evitar la rotura frágil [1].

Al incrementar la cuantía de armado y antes del fallo nuevas fisuras se generan y progresan a la largo de la viga en áreas más alejadas de la zona de máximo momento flector. Esta fisuras crecen en presencia de una combinación de esfuerzo cortante y flector. Si la cuantía de armado es suficiente una de estas fisuras se propaga, antes de alcanzarse la carga de plastificación de las armaduras, de forma inestable provocando el fallo de la viga [2]. En tecnología de estructuras este tipo de fallo se denomina convencionalmente como fallo por tracción diagonal o fallo por cortante [3]. No obstante y dependiendo de las características geométricas de las vigas y mecánicas de los materiales se puede producir el fallo por compresiones excesivas en la parte superior de la viga.

En el presente articulo se analiza la relación entre la cuantía de armado, la posición inicial de la fisura, la trayectoria de las mismas y el tipo de fallo, en vigas de hormigón armado armadas sin cercos. Un total de 16 vigas con 4 cuantías diferentes de armado han sido ensayadas. El articulo se centra en la descripción de los resultados experimentales con especial atención a las trayectorias de las fisuras y la transición entre modos de fallo. Este estudio forma parte de una investigación más amplia con

el objeto de establecer de forma racional la cuantía en la que se produce en la transición entre fallos y como el tamaño del elemento y propiedades del hormigón influyen en ella.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROGRAMA EXPERIMENTAL

El estudio se ha planteado con el fin de analizar la influencia del la cuantía de armado en el mapa de fisuración. Aunque al aumentar la cuantía de armado las fisuras acaban extendiéndose a toda la viga, nos hemos centrado en el estudio de la posición inicial y forma de la fisura que determina el fallo del elemento, en adelante denominada *fisura crítica*, en relación con la cuantía de armado. Las cuantías de las vigas fueron definidas en base a los siguientes requerimientos:

- La cuantía más baja corresponde aproximadamente al mínimo mecánico para evitar el fallo frágil;
- La siguiente cuantía se fijó aproximadamente en la transición entre el fallo por flexión y el fallo por cortante;
- La tercera cuantía se determino para que el fallo de la viga se produjera por tracción diagonal;
- La mayor de las cuantías se definió de tal forma que se indujera en la viga un fallo por compresiones excesivas en la parte superior.

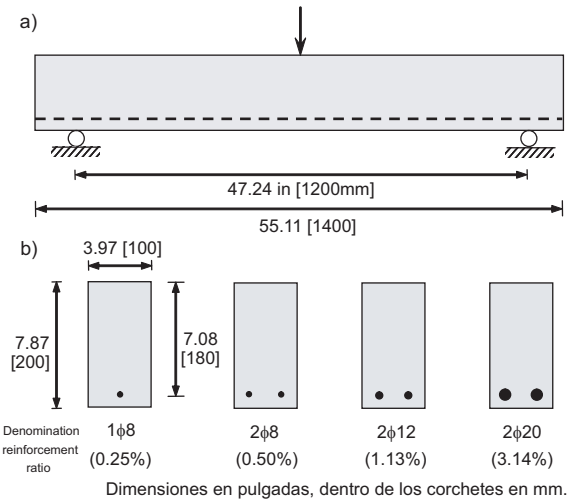

Figura 1: Geometría y armado de las vigas

La geometría de las vigas y cuantías son mostradas en la Figura 1. Las dimensiones de las vigas se determinaron de tal forma que su manipulación en el laboratorio fuera razonablemente sencilla. La distancia entre apoyos es igual a seis veces el canto de la viga. La Figura 1b muestra la sección central de las secciones consideradas. Cada viga se denomina por las barras de armado que contiene, entre paréntesis se muestra la cuantía de armado.

La caracterización de los materiales fue realizada mediante ensayos independientes de acuerdo con Normativas y recomendaciones vigentes. Los detalles de estos ensayos de caracterización son presentados en el siguiente apartado. Todos los ensayos se han realizado en el laboratorio de materiales y estructuras del Departamento de Estructuras y Geotécnia del Politécnico de Turín

3. CARACTERIZACIÓN DE LOS MATERIALES

Un único hormigón fue utilizado en la ejecución de todas las vigas. Se realizó un estricto control del proceso de fabricación de las vigas para minimizar las desviaciones. Tanto las vigas como las probetas para caracterización se fabricaron en la planta de Buzzi-Unicem sita en Santhià, localidad cercana a Turín.

Los ensayos forman parte de una mas extensa campaña que se ha realizado con el objeto de estudiar el comportamiento de vigas ejecutadas con hormigón con fibras metálicas y armado. La determinación de la energía de fractura y tenacidad se realizó de acuerdo a la recomendación RILEM TC-89 [4] y siguiendo el procedimiento recomendado por Elices, Guinea y Planas [5]. La tenacidad se determinó a partir de la relación $K_{IC} = \sqrt{G_f E}$, donde G_f y E son la energía de fractura y el módulo de elasticidad respectivamente. La resistencia a compresión, f_{ck}, fue medida en cubos de dimensiones $150 \times 150 \times 150$ mm. El modulo de elasticidad se determino sobre probetas prismáticas de dimensiones de $100 \times 100 \times 300$ mm. La resistencia en probeta cilíndrica, f_c, fue evaluada a partir de la resistencia en probeta cúbica a través de la expresión $f_c = 0{,}85 f_{ck}$.

En la tabla 1 mostramos los resultados obtenidos.

	f_c [a] MPa	E_c GPa	G_F N/m	K_{IC} [b] Nmm$^{3/2}$
mean	49.4	33.1	111.5	60.7
cov.(%)	11.5	2.5	13.0	-

[a] probeta cilíndrica
[b] $K_{IC} = \sqrt{E G_F}$

Tabla 1: Características mecánicas del hormigón

Para realizar el armado de las vigas se han utilizado barras de $8\ mm$, $12\ mm$ y $20\ mm$ de diámetro. El limite elástico al $0{,}2\,\%$ de deformación se midió en 519 MPa y la resistencia última en 623 MPa. El armado utilizado era corrugado.

4. METODOLOGÍA EXPERIMENTAL

Todas las vigas fueron ensayadas en un dispositivo de flexión en tres puntos tal y como se muestra en la Figura 1. Los ensayos se realizaron en una maquina dinámica servo-hidráulica tipo MTS 204.71 con una capacidad

de 250 kN. La carga fue aplicada sobre una placa de 50 mm de ancho situada en el centro del vano. Para medir el desplazamiento vertical se dispusieron dos transductores lineales (LPT) con un rango de medida de 100 mm. El desplazamiento vertical, δ, se determinó como la media de la medida dada por ambos LPTs. Adicionalmente en los apoyos se dispusieron otros LPTs para medir el desplazamiento en éstos y corregir el desplazamiento del centro de vano.

El desplazamiento en centro de vano fue tomado como parámetro de control de los ensayos. Durante los ensayos la velocidad del desplazamiento vertical se mantuvo constante con un valor igual a $8\mu\text{ms}^{-1}$. La carga maxima se alcanzaba aproximadamente unos 15-20 minutos tras comenzar el ensayo dependiendo de la cuantía de armado. La duración total de cada ensayo fue de unos 30-45 minutos. La carga, P, y el desplazamiento bajo el punto de carga, δ, fueron monitorizadas durante todo el ensayo. Finalmente y para completar la información de cada ensayo los mapas de fisuración de ambas caras fueron tomados fotografiando ambas caras con una cámara de alta resolución. De cada tipo de viga se ensayaron al menos 4 probetas.

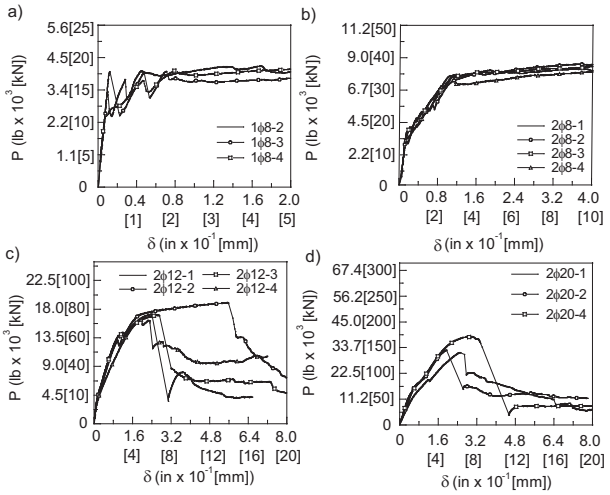

Figura 2: Curvas carga-desplazamiento (P-δ)

5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Todas las curvas carga desplazamiento son mostradas en la Figura 2. El eje y esta escalado de acuerdo con la cuantía de armado para poder comparar las curvas. Para facilitar la comparación entre vigas del mismo tipo se ha corregido la pendiente inicial de las curvas a la teórica que se obtendría mediante la teoría de la elasticidad [6]. Se ensayaron correctamente 14 de las 16 vigas planteadas.

El comportamiento de las vigas es siempre lineal en el primer tramo. En las vigas más débilmente armadas la carga de fisuración (primer pico) es aproximadamente igual a la carga última, que vienen dada por el tramo horizontal. Al aumentar la cuantía de armado se aprecia un cambio en la pendiente inicial coincidente con el punto donde se fisura la viga lo que provoca una perdida de rigidez. Para las dos cuantías más bajas, $0{,}25\,\%$ y $0{,}50\,\%$, observamos como en la parte final de las curvas se produce un tramo prácticamente horizontal, que indica que las armaduras han plastificado, aumentando el desplazamiento vertical sin un aumento significativo de la carga. El fallo de estas vigas es dúctil y se identifica con el fallo por flexion. En cambio para las cuantías más altas, $1{,}13\,\%$ and $3{,}14\,\%$, un repentino descenso en la carga es medido, sin que se haya alcanzado la plastificación de las armaduras. Las vigas fallan de forma frágil.

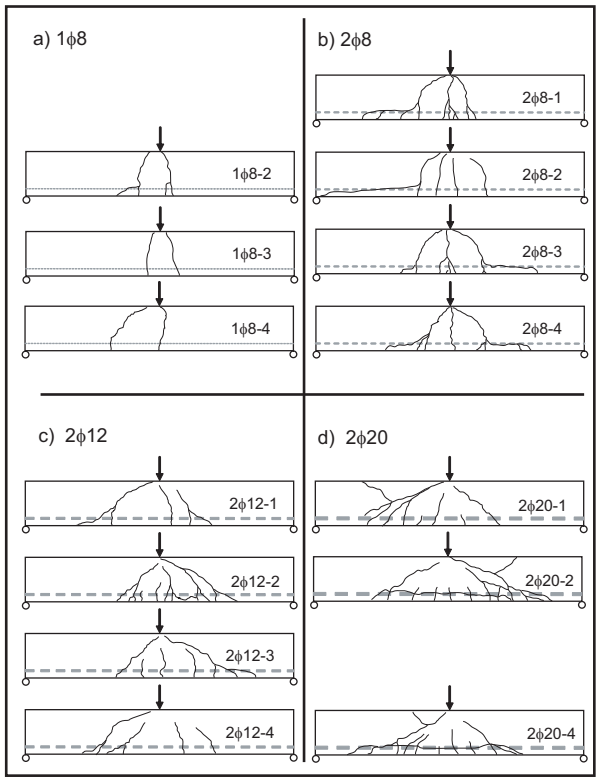

Figura 3: Patrones de fisuración

Los patrones de fisuración de las vigas ensayadas son mostrados en la Figura 3. Durante el proceso de carga las primeras fisuras son de flexión en zonas cercanas al centro de vano. Para la menor de las cuantías ($0{,}25\,\%$), Figura 3a, el acero plastifica rápidamente tras la carga de fisuración, en una de las fisuras formadas, de esta forma la deformación se localiza en la barra de acero y se bloquea el progreso de más fisuras en el elemento de hormigón armado. Para las vigas armadas con una cuantía del $0{,}50\,\%$, Figura 3b, la longitud de vano donde aparecen fisuras se amplía, aunque el comportamiento mecánico es bastante similar al caso de vigas con un $0{,}25\,\%$ de cuantía: el acero plastifica en una de las fisuras y se localiza la deformación en la barra provocando un fallo dúctil. Se observa en algunos casos que aparece una fisura horizontal a la altura del armado provocada por la movilización en las fases finales del ensayo de la adherencia entre hormigón y acero. Estas fisuras también se deben a la movilización del efecto pasador al producirse una desplazamiento ver-

tical entre los labios de la fisura. Para las vigas con una cuantía del $1{,}13\,\%$, Figura 3c, tanto fisuras de flexión y de flexión cortante aparecen a lo largo del vano. Comparando el patrón con los casos anteriores la zona afectada por las fisuras aumenta de forma sensible. El fallo del elemento se genera al propagarse una de estas fisuras de forma inestable al no poder controlar su progreso el armado y liberando gran parte de la energía contenida por el elemento [3]. El armado no llega a plastificar y un subito y frágil fallo tiene lugar. Durante el crecimiento inestable de la fisura una redistribución de la forma en la que la carga es soportada se produce desde el conjunto armado–ligamento de hormigón comprimido a efecto pasador de las barras a través de las fisuras. El hormigón que rodea el refuerzo no es capaz de de soportar la carga transmitida por las barras y se originan fisuras longitudinales a la altura del armado tras la carga máxima. Finalmente para las vigas más armadas $(3{,}14\,\%)$, véase la Figura 3d, se obtiene el patron más extenso. Las fisuras de flexión y cortante aparecen a lo largo del vano y se desarrollan hasta que en la parte central de la viga se produce en su cara superior el fallo por compresiones excesivas, caracterizado por la aparición de una fisuración en forma de cuña cerca del punto de aplicación de la carga.

6. INFLUENCIA DE LA CUANTÍA DE ARMADO

La influencia de la cuantía de armado es bien conocida en la vigas de hormigón armado, la máxima carga y el modo de fallo dependen fuertemente de ésta. Este efecto es observado en la Figura 4a, donde representamos una curva P-δ para cada uno de los tipos de vigas ensayadas. Al aumentar la cuantía la carga aumenta, también se observa la transición desde un fallo dúctil, predominantemente en flexión para las vigas con menor cuantía a un fallo frágil de las vigas con la mayor cuantía de armado.

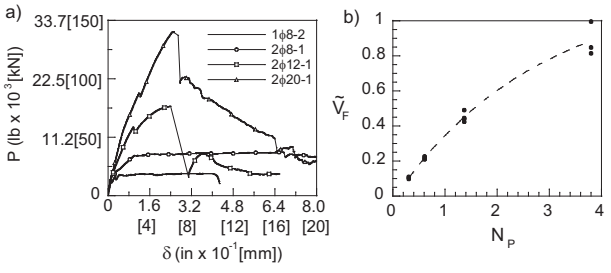

Figura 4: Influencia de la cuantía de armado; a) curvas P-δ; b) curva $\tilde{V}_F$-N_P

En la Figura 4b representamos la carga máxima en cada ensayo expresada de forma adimensional en abscisas, $\tilde{V}_F$, frente a denominado numero de fragilidad de Carpinteri, N_P [7]. Este numero de fragilidad es proporcional a la cuantía de armado. La expresión del número de fragilidad, N_P y del cortante en el apoyo de forma adimensional, $\tilde{V}_F$ es:

$$N_P = \frac{f_y h^{\frac{1}{2}}}{K_{IC}}\rho; \qquad \tilde{V}_F = \frac{V_F}{K_{IC} h^{\frac{1}{2}} b} \tag{1}$$

donde K_{IC} es la tenacidad en fractura del hormigón, f_y el límite elástico del acero y V_F es el cortante en la sección que se analiza. Cada uno de los puntos representa el valor de uno de los resultados realizados. Se ha dibujado una linea de interpolación para ver más claramente la tendencia. Las curvas muestran una variación no lineal de la carga máxima, más evidente al aumentar el numero de fragilidad. La respuesta no lineal esta relacionada con el cambio en el modo de fallo (flexión→cortante→compresión).

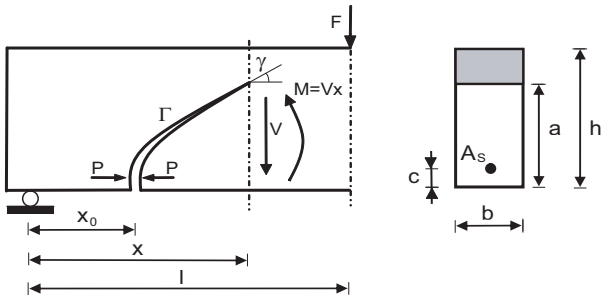

Figura 5: fisura critica

7. FISURA CRÍTICA

En ensayos a flexión en tres puntos, el fallo se desarrolla generalmente por la formación y desarrollo de una serie de fisuras de flexión-corte a lo largo del vano, hasta que en una de ellas se localiza una deformación excesiva de la armadura y se provoca el fallo de la viga

Aunque los mapas de fisuración en vigas de hormigón presentan una alta densidad de fisuras, nos vamos a centrar en el presente estudio en la fisura cuya apertura determina el fallo de la viga. Para poder interpretar los resultados experimentales la trayectoria real observada en los ensayos va a ser descrita de forma matemática a partir de la ecuación definida para las trayectoria de las fisuras definida para su modelación con el *bridged crack model* [8]. La trayectoria de la fisura, Γ, queda caracterizada en por dos partes. La primera parte, Γ_1, es vertical y va desde la parte inferior de la viga hasta la posición del armado. La segunda parte, Γ_2, se modela con una función exponencial que se desarrolla desde la intersección de la primera parte y el armado hasta el punto de aplicación de la carga. La trayectoria de la fisura $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es definida analíticamente por la función:

$$\Gamma(a) = \begin{cases} x_0 & c \geq a \\ x_0 + \left(\dfrac{a-c}{h-c}\right)^{\mu} (l - x_0) & c \leq a \leq h \end{cases} \tag{2}$$

donde h es el canto, l es la luz de cortante, a es la altura del fondo de la fisura, c es el recubrimiento, x es la abscisa del fondo de fisura, x_0 es la abscisa del punto de iniciación de la fisura y μ es el exponente de la función exponencial que define la trayectoria de la fisura. Para facilitar la comparación entre diferentes trayectorias la Eq. (2) puede ser escrita en forma adimensional mediante las variables:

$$\alpha_0 = \frac{x_0}{l}; \qquad \alpha = \frac{x}{l}; \qquad \xi = \frac{a}{h}; \qquad \zeta = \frac{c}{h}; \qquad \lambda_l = \frac{l}{h} \tag{3}$$

La ecuación de las trayectorias quedaría como:

$$\alpha(\zeta,\xi) = \begin{cases} \alpha_0 & \zeta \geq \xi \\ \alpha_0 + \left(\dfrac{\xi-\zeta}{1-\zeta}\right)^{\mu}(1-\alpha_0) & \zeta \leq \xi \leq 1 \end{cases} \tag{4}$$

donde α es la abscisa desde el apoyo escrita de forma adimensional, ξ es la altura del fondo de fisura relativa al canto, α_0 es la abscisa del punto inicial de la fisura desde el soporte y ζ es el recubrimiento expresado de forma relativa al canto. Todas esta variables tienen un rango de variación de 0 a 1. Finalmente λ_l es la esbeltez de la luz de cortante, $(\lambda_l = \frac{l}{h})$.

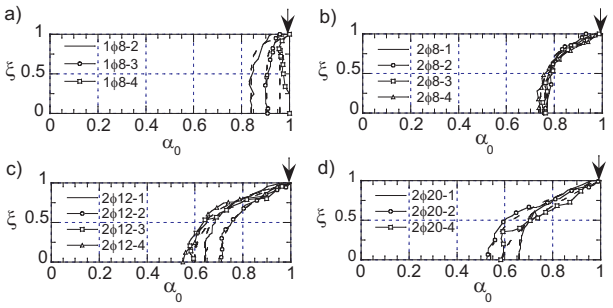

Figura 6: Trayectorias de las fisuras adimensionalizadas

La Figura 6 muestra las diferentes *fisuras críticas* observadas en cada uno de los ensayos realizados. Las fisuras se muestran de forma adimensional. Únicamente se represente la mitad de la viga. La flecha dibujada representa el punto de aplicación de la carga y el apoyo se describe con la abscisa $\alpha_0 = 0$.

Cada una de las fisuras críticas se discretizo en puntos y para hallar los parámetros que caracterizan la trayectoria de la fisura (6) μ y α_0 se realizó una regresión no lineal. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 2. Complementariamente mostramos el coeficiente de correlación de Pearson R, la carga máxima expresada de forma adimensional $\tilde{V}_{test}$ y el modo de fallo observado.

Probeta	α_0	μ	R [a]	$\tilde{V}_{test}$ [b]	modo fallo [c]
1ϕ8-2	0.84	8.70	0.50	0.10	F
1ϕ8-3	0.91	9.10	0.59	0.09	F
1ϕ8-4	0.96	24.9	0.48	0.10	F
2ϕ8-1	0.77	5.29	0.98	0.21	F
2ϕ8-2	0.78	6.05	0.92	0.22	F
2ϕ8-3	0.76	3.76	0.99	0.23	F
2ϕ8-4	0.74	3.21	0.99	0.21	F
2ϕ12-1	0.64	3.59	0.98	0.44	C
2ϕ12-2	0.72	2.74	0.99	0.49	C/F
2ϕ12-3	0.60	2.60	0.98	0.44	C
2ϕ12-4	0.61	3.30	0.97	0.42	C
2ϕ20-1	0.64	3.40	0.99	0.82	C/CM
2ϕ20-2	0.54	2.32	0.99	0.85	C/CM
2ϕ20-4	0.58	1.78	0.95	0.99	C/CM

[a] coeficiente de correlación de Pearson's
[b] ver Eq. (1)
[c] modo de fallo F=flexión; C=cortante; CM=compresión

Tabla 2: Resultados de la caracterización de la trayectoria de las fisuras.

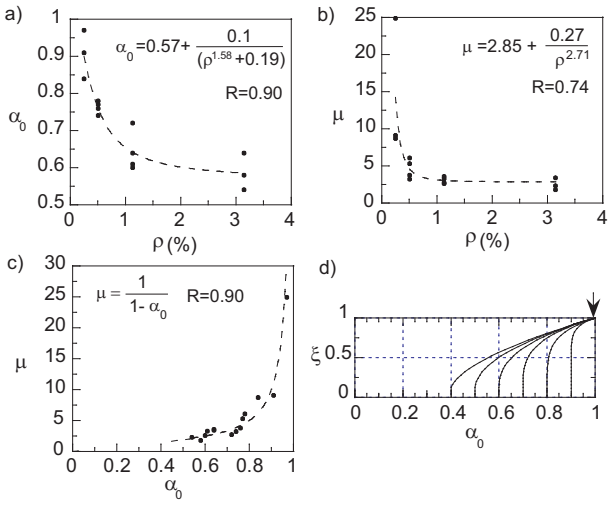

Figura 7: (a) Influencia del punto de iniciación de la fisura con la cuantía de armado; (b)influencia del exponente de caracterización de la trayectoria con el armado; (c) relación entre el punto de iniciación y el exponente; (d) familia de fisuras críticas obtenida a partir de los resultados experimentales

La figura 7a analiza la influencia de la cuantía de armado, ρ, en la posición inicial de la fisura crítica, α_0. La linea de puntos representa una regresión no lineal con la siguiente ecuación:

$$\alpha_0 = 0{,}57 + \frac{0{,}10}{0{,}19 + \rho^{1{,}58}} \tag{5}$$

Al incrementar la cuantía de armado el valor de α_0 decrece. Esto significa que la fisura critica se origina mas cerca del apoyo al aumentar la cuantía. También observamos que al aumentar la cuantía las fisuras el valor de α_0 es

aproximadamente $0{,}50$ lo que indica que las fisuras tienden a iniciarse en la parte central de la luz de cortante. La relación entre la cuantía de armado y el exponente de la ecuación que define la trayectoria de la fisura es mostrada en la Figura 7b. Este exponente tiende a disminuir su valor cuando la cuantía de armado aumenta. Esta tendencia es interpretada como que al aumentar la cuantía las fisuras tienden a ser mas inclinadas respecto a al directriz de la viga. Las líneas de puntos representa un regresión no lineal de los resultados obtenidos a partir de los ensayos con ecuación:

$$\mu = 2{,}85 + \frac{0{,}27}{\rho^{2{,}71}} \tag{6}$$

Las expresiones mostradas anteriormente, ecuaciones (5) y (6), y los datos geométricos, materiales y resultados de los ensayos pueden ser utilizados para contrastar diferentes modelos experimentales. La Figura7c representa la relación entre el exponente que caracteriza la trayectoria y el punto de iniciación de la fisura. Las fisuras tienden a ser más tendidas al acercarse al apoyo. Por último en la figura 7d se representa la familia de *fisuras críticas* que tendríamos en un elementos de hormigón armado. Cada una de las trayectorias está asociada a una cuantía de armado y a un tipo fallo. Las mas cercanas al centro de vano aplicarán el el fallo por flexión y conforme nos vayamos alejando las fisuras criticas provocarán el fallo del elemento por tracción diagonal (cortante). Con la ayuda del modelo presentado en la referencia [8] se puede establecer la transición entre ambos tipo de fallo.

8. CONCLUSIONES

El presente articulo presenta los resultados de una campaña experimental realizada ensayando a flexión en tres puntos vigas de hormigón armado con diferentes cuantías de armado. El programa experimental fue diseñado para estudiar la influencia de la cuantía en los mapas de fisuración con especial atención al modo de fallo y la fisura donde se localiza la rotura (*fisura crítica*). Se ha realizado un análisis de la posición inicial de las fisuras criticas y de su forma con la ayuda de la formulación matemática descrita para su análisis con el *bridged crack model* [8].

Los mapas de fisuración y el comportamiento mecánico es muy sensible a la cuantía de armado. Para cuantías bajas las fisuras críticas se localizan en zonas cercanas a la posición de la carga y son prácticamente verticales, además el fallo de la viga se produce por flexión. Al aumentar la cuantía de armado la posición inicial de la fisura critica se desplaza hacia el apoyo y el fallo se produce por tracción diagonal (cortante). La cuantía de armado controla la posición de la fisura critica y en consecuencia el tipo de fallo del elemento. En base al estudio se proponen unas expresiones para determinar su posición y forma. a cada cuantía se le asocia una trayectoria crítica. Los resultados pueden servir para contrastar modelos teóricos. En nuestro caso se utilizaran para contrastar el modelo *bridged crack model*, unificando los distintos tipos de fallo en un único modelo.

A partir de las observaciones realizadas se pueden analizar problemas tecnológicos como son el establecimiento de zonas para realizar la comprobación del fallo por cortante, o la determinación de la cuantía minima por debajo de la cual no sera necesaria la comprobación a cortante de elementos de hormigón armado ya que fallarían por flexión. Estos puntos serán abordados en próximos trabajos y muestran como problemas tecnológicos dentro del campo de las estructuras de hormigón pueden ser abordados de forma racional bajo el punto de vista de teoría relacionadas con la mecánica de la fractura.

AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan su agradecimiento a la Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha por el Proyecto PAI08-0196-8210. Un agradecimeinto particuar a la empresa Buzzi-Unicem y al Ing. Enrico Moretti por su ayuda en la preparación de todas las probetas y su transporte hasta el Politecnico di Torino

REFERENCIAS

[1] Carpinteri, A. Ed, *Minimum Reinforcement in Concrete Members.* Number 24 in ESIS Publication. Elsevier. London. 1999

[2] Karihaloo, B., *Fracture Mechanics & Structural Concrete.* Longman, Scientific & Technical. 1995

[3] J. R. Carmona, G. Ruiz and J. R. del Viso, Mixed-mode crack propagation through reinforced concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 74(17):2788–2809, 2007.

[4] RILEM TC 89-FMT, Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of three-point bend tests on notched beams. *Materials and Structures*, 23:457–460, 1985.

[5] Z. P. Bažant, and J. Planas, *Fracture Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials*. CRC Press, Boca Raton. 1998.

[6] Planas, J. and Guinea, G. V. and Elices, M., Stiffness associated with quasi-concentrate loads. *Materials and Structures*, 27:311–318, 1992.

[7] Carpinteri, A., Stability of fracturing process in RC beams. *Journal of Structural Engineering-ASCE*, 110:544–558, 1984.

[8] Carpinteri, A. and Carmona, J. R. and Ventura, G., Propagation of flexural and shear cracks through reinforced concrete beams by the brided crack model. *Magazine of Concrete Research*, 59(10):743–756, 2007.