MODELO ANALÍTICO PARA ESTUDIAR LA PROPAGACIÓN DE FISURAS EN MODO MIXTO EN ELEMENTOS DE HORMIGÓN ARMADO. APLICACIÓN DEL BRIDGED CRACK MODEL.

A. Carpinteri[1], J. R. Carmona[2] y G. Ventura[1]

[1]Dept. Structural and Geothechnical Engineering,
Politecnico di Torino, Corso Duca degli Abruzzi, 24,
10129 Torino, Italia.

[2]E.T.S. de Ingenieros de Caminos,
Canales y Puertos, Universidad de Castilla la Mancha
Avenida Camilo José Cela s/n, 13071 Ciudad Real
E-mail: jacinto.ruiz@uclm.es
Tfno: 926 29 53 00 Ext. 3276. Fax: 926 29 53 91

RESUMEN

El denominado "Bridged Crack Model" fue desarrollado para la modelación del comportamiento en flexión de elementos de hormigón armado utilizando herramientas de Mecánica de Fractura Elástica Lineal. En la presente ponencia este modelo se extiende para modelar el comportamiento de fisuras en modo mixto, es decir en presencia de esfuerzos de flexión y cortante. Hemos realizado diversas hipótesis sobre la trayectoria de las fisuras así cómo sobre el punto de iniciación de las mismas. También se han realizado hipótesis, basándose en cálculos exactos, sobre los factores de intensidad de tensiones ya que no existía una formulación para las geometrías seleccionadas. El modelo propuesto aproxima el problema de la propagación en modo mixto a un problema de propagación en modo I. Así pues el problema de fisuración por flexión (modo I) queda como un caso particular del modelo propuesto. El modelo permite comparar la carga necesaria para la propagación de cada una de las fisuras y así determinar la carga última y el tipo de fallo del elemento de hormigón armado.

ABSTRACT

The Bridged Crack Model has been developed for modelling the flexural behaviour of reinforced concrete beams and related size effects explaining brittle-ductile-brittle failures modes transitions. In the present paper the model is extended to shear failure modelling, introducing a given shape for the hypothetical crack path and determining the load-crack depth curve and the initial crack position for three point bending problems. The proposed formulation approaches the pure mode I flexural behaviour as a particular case, so that the flexural and shear failure modes can be immediately compared to detect which one dominates and determine the relevant failure load. The model is analyzed by varying the governing non-dimensional parameters to show its properties.

ÁREAS TEMÁTICAS PROPUESTAS: Métodos analíticos y numéricos.

PALABRAS CLAVE: Hormigón armado, Fractura en modo mixto, Efecto de escala.

1. INTRODUCCIÓN

El denominado "Bridged crack model"[1, 2] fue originalmente propuesto para el estudio de elementos de hormigón armado por medio de un análisis basado en conceptos de Mecánica de Fractura Elástica y Lineal ($LEMF$). El problema del efecto de escala y de las transiciones entre fallos frágiles y dúctiles fueron analizados con este modelo, con especial atención a los problemas de cuantía mínima mecánica. Posteriormente se introdujeron en el modelo la acción de tensiones cohesivas durante la propagación de la fisura [3]. Recientemente, el modelo ha sido extendido para analizar rotura por compresión mediante $LEFM$, permitiendo el estudio de las transiciones entre fallos por flexión (plastificación de las armaduras) y compresiones excesivas [4].

En este artículo se analiza el comportamiento de una viga sin cercos sometida a flexión en tres puntos, usando conceptos aplicados en el ya mencionado "bridged crack model". Para extender el modelo y analizar fisuras situadas en zonas donde existen esfuerzos de flexión y de corte se han introducido diversas hipótesis. En primer lugar se ha establecido una trayectoria de fisura de acuerdo con observaciones experimentales. La segunda hipótesis se realiza para evaluar los factores de intensidad de tensiones, necesarios para desarrollar el modelo. Asumimos que la fisura únicamente progresará en modo I en el fondo de la fisura, aproximando el valor del factor de intensidad de tensiones mediante una expresión analítica validada mediante cálculos exactos de las geometrías seleccionadas, realizados con un programa de elementos de contorno [5]. El efecto pasador de las barras y el engranaje entre áridos es despreciado en el modelo.

2. HIPÓTESIS BÁSICAS

2.1. *Trayectoria de las fisuras*

Las fisuras en elementos de hormigón armado al ser cargados en flexión a tres puntos, tienen una forma característica. Primero aparecen en el centro de vano y son perpendiculares a la cara inferior de la viga. Al incremetar la carga y si las condiciones de adherencia entre hormigón y acero lo permiten, aparecen nuevas fisuras alejadas del centro del vano. Estas fisuras también crecen en un principio perpendiculares a la cara inferior, pero durantre su desarrollo van inclinandose hacia el punto de carga [6].

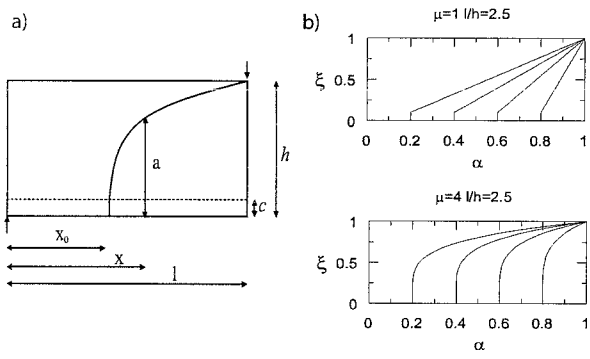

Figura 1: (a) Trayectoria asumida; (b) ejemplos de trayectorias normalizadas.

En este estudio consideramos una fisura, Γ, formada por dos tramos, uno, Γ_1, perpendicular a la cara inferior y que se extiende desde el borde inferior hasta al punto donde se situa el armado, y un segundo tramo, Γ_2, de forma parabólica, con exponente μ, que se extiende desde la capa de armado hasta el punto de aplicación de la carga, véase la Fig. 1a. Analíticamente esta trayectoria se define como,

$$\Gamma_1 \qquad x = x_0 \qquad a \leq c \qquad (1)$$

$$\Gamma_2 \qquad x = x_0 + (\tfrac{a-c}{h-c})^{\mu}(l - x_0) \qquad h \geq a \geq c \quad (2)$$

El significado de cada variable se muestra en la Fig. 1. Las Eqs. 1 y 2 pueden ser reescritas en forma adimensional, para ello primero vamos a definir los siguientes parámetros,

$$\alpha = \frac{x}{l}; \qquad \xi = \frac{a}{h}; \qquad \alpha_0 = \frac{x_0}{l}; \qquad \zeta = \frac{c}{h} \qquad (3)$$

Donde α el distancia horizonal al apoyo del fondo de fisura en forma adimensional, ξ es la profundidad de la fisura adimensionalizada, α_0 es la posición del inicio de la fisura y ζ es el recubrimiento expresado en forma adimensional. Todos estos parámetros tienen un valor conprendido entre 0 y 1. Expresando las Eqs. 1 y 2 en función de estos parámetros obtenemos:

$$\Gamma_1 \qquad \alpha = \alpha_0 \qquad \xi \leq \zeta \qquad (4)$$

$$\Gamma_2 \qquad \alpha = \xi_0 + (\tfrac{\xi-\zeta}{1-\zeta})^{\mu}(l - \alpha_0) \qquad 1 \geq \xi \geq \zeta \quad (5)$$

En la Fig. 1b mostramos dos ejemplos de las trayectorias asumidas en forma adimensionalizada.

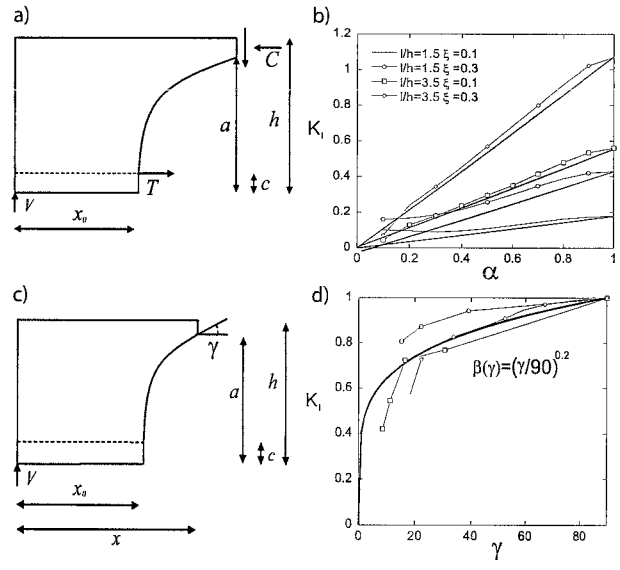

Figura 2: (a) Elemento de hormigón fisurado; (b) comparación entre los resultados teóricos y las aproximaciones realizadas para K_I; (c) definición del ángulo γ; (d) comparación entre la función $\beta(\gamma)$ adoptada y resultados exactos obtenidos.

2.2. *Factores de intensidad de tensiones*

No existe una formulación exacta para evaluar los factores de intensidad de tensiones requeridos para las cargas, geometría y posición de la fisura a utilizar en el modelo. Por ello para obtener unas formulacíones aproximadas realizamos una serie de hipótesis. Los factores de intensidad de tensiones a utilizar son dos, ambos para la geometría expuesta en la Fig. 2a, uno para la fuerza externa, V y el otro para la tracción de refuerzo, P.

Para evaluar el factor de intensidad de tensiones debido a la fuerza exterior asumimos que este puede ser aproximado por el de una viga sometida a flexión pura al igual que hicieron Jenq y Shah en su modelo [7]. El factor de intensidad de tensiones producido el el fondo de fisura por un momento flector viene dado por [8]:

$$K_{IM} = \frac{M}{h^{\frac{3}{2}}b} Y_M(\xi) \quad (6)$$

El momento, M, a utilizar será el que existe en el fondo de fisura que puede expresarse en función del esfuerzo cortante, que en este caso es igual a la reacción en el apoyo, véase la Fig 2a.

$$M = Vx = Vl\alpha(\zeta, \xi) \quad (7)$$

Introduciendo la Eq. 7 en la Eq. 6 , podemos expresar el factor de intensidad de tensiones de la siguiente forma:

$$K_{IV} = K_{IM} = \frac{Vl\alpha(\zeta, \xi)}{h^{\frac{3}{2}}b} Y_M(\xi) = \frac{V}{h^{\frac{1}{2}}b} Y_V(\zeta, \xi) \quad (8)$$

Donde, la función de forma $Y_V(\zeta, \xi)$ se expresa como:

$$Y_V(\zeta, \xi) = \frac{l}{h}\alpha(\zeta, \xi) Y_M(\xi) \quad (9)$$

El factor de intensidad de tensiones producido en el fondo de la fisura por unas fuerzas P que actuan al nivel del refuerzo viene dado por:

$$K_{IP} = \frac{P}{h^{\frac{1}{2}}b} Y_{Psc}(\zeta, \xi) \quad (10)$$

La función $Y_{Psc}(\zeta, \xi)$ esta definida y puede ser encontrada en manuales con valores del factor de intensidad de tensiones. Para determinar una función aproximada y así obtener el valor de la función de forma se han realizado análisis con elementos de contorno [5]. Una función $\beta(\gamma)$ se ha definido con el fin de corregir el valor de $Y_{Psc}(\zeta, \xi)$ en función del ángulo de inclinacinación de la tangente a la trayectoria en el fondo de fisura respecto a la horizontal.

$$\beta(\gamma) = (\frac{\gamma}{90})^{0,2} \quad (11)$$

Donde γ es el citado ángulo, en grados sexagesimales, Fig. 2c. En la Fig. 2d mostramos una representación gráfica de la función $\beta(\gamma)$ junto con los resultados exactos obtenidos. Finalmente el factor de intensidad de tensiones debido a la tracción del refuerzo puede ser expresado como:

$$K_{IP} = \frac{P}{h^{\frac{1}{2}}b} Y_{Psc}(\zeta, \xi)\beta(\gamma) = \frac{P}{h^{\frac{1}{2}}b} Y_P(\zeta, \xi) \quad (12)$$

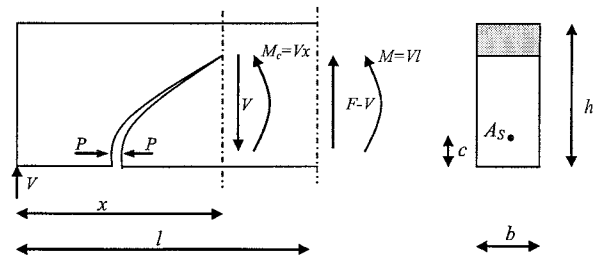

Figura 3: Geometría del elemento fisurado.

3. MODELACIÓN DEL PROCESO DE FRACTURA

Considerando el elemento fisurado mostrado en la Fig. 3, en el que se representa un elemento de hormigón armado fisurado, sometido a la acción de un momento M, función del cortante V y de la posición, x, del fondo de fisura, y a una fuerza P debida a la acción de armado; el desplazamiento Δv bajo el punto de aplicación de la fuerza externa F, y el desplazamiento $\Delta\omega$ entre los puntos de aplicación de la tracción producida por el refuerzo P pueden ser expresados a traves de la suma de los desplazamientos producidos por V y P.

$$\Delta v = \Delta v_{VV} + \Delta v_{VP} = \lambda_{VV}V - \lambda_{VP}P \quad (13)$$
$$\Delta\omega = \Delta\omega_{PV} + \Delta\omega_{PP} = \lambda_{PV}V - \lambda_{PP}P \quad (14)$$

Donde λ_{VV}, λ_{VP}, λ_{PV}, λ_{PP}, representan las flexibilidades del elemento, respecto a cada una de las cargas debidas a la existencia de una fisura. Estas flexibilidades pueden hallarse mediante métodos energéticos, considerando la acción simultanea de la fuerza exterior y del refuerzo.

Si G, E son respectivamente la energía de fractura y el módulo elástico del material y K_{IV} and K_{IP} los factores de intensidad de tensiones obtenidos anteriormente, la variación de de la energía del sistema ΔW debida a una propagación de la fisura, Δa puede expresarse como:

$$\Delta W = -Gb\Delta a = -\frac{(K_{IV} + K_{IP})^2}{E} b\Delta a \quad (15)$$

Aplicando el teorema de Clayperyon obtenemos que

$$\Delta W = \frac{1}{2}V\Delta v_{VV} + \frac{1}{2}P\Delta\omega_{PP} + \frac{1}{2}(P\Delta\omega_{PV} + V\Delta v_{VP}) \quad (16)$$

Mediante la aplicación del teorema de reciprocidad sabemos que $P\Delta\omega_{PV} = V\Delta v_{VP}$, integrando e identificando terminos en las Eqs. 15 y 16 obtenemos que:

$$v_{VV} = \frac{2}{V}\int_0^a \frac{K_{IV}^2}{E} bda \tag{17}$$

$$\omega_{PP} = \frac{2}{P}\int_c^a \frac{K_{IP}^2}{E} bda \tag{18}$$

$$P\omega_{PV} = Vv_{VP} = 2\int_c^a \frac{K_{IP}K_{IV}}{E} bda \tag{19}$$

Sustituyendo los factores de intensidad de tensiones por sus valores, Eqs. 8 y 12, obtenemos las flexibilidades λ_{VV} (desplazamiento vertical bajo el punto de carga producido por una fuerza $V = 1$), λ_{PP} (apertura de fisura horizontal en la posición del refuerzo para una tracción $P = 1$), λ_{PV} (apertura de fisura horizontal en la posición del refuerzo producida por un cortante vertical, $V = 1$) y λ_{VP} (desplazamiento vertical bajo el punto de carga producido por una tracción del refuerzo, $P = 1$).

Las integrales mostradas en las Eqs. 17, 18 y 19 se realizan sobre una trayectoria de fisura curvilinea. Para expresar la integral en función de la profundidad adimensionalizada ξ, deberemos hallar el jacobiano de la expresión con la que definimos la curva, Eqs. 4 y 5. Para la trayectoria seleccionada en este estudio la expresión que define esta función, $g(\zeta, \xi)$, es:

$$g(\zeta, \xi) = 1 \qquad \xi < \zeta \tag{20}$$

$$g(\zeta, \xi) = \sqrt{\mu^2(\frac{l}{h})^2(\frac{1}{1-\zeta})^{2\mu}(\xi - \zeta)^{2(\mu-1)}(1-\alpha_0)^2 + 1} \tag{21}$$

Las flexibilidades λ_{VV}, λ_{VP}, λ_{PV}, λ_{PP} se expresan finalmente como:

$$\lambda_{VV} = \frac{2}{Eb}[\int_0^\zeta Y_V^2(\xi)d\xi + \int_\zeta^\xi Y_V^2(\xi)g(\zeta,\xi)d\xi] \tag{22}$$

$$\lambda_{PP} = \frac{2}{Eb}\int_\zeta^\xi Y_P^2(\zeta,\xi)g(\zeta,\xi)d\xi \tag{23}$$

$$\lambda_{PV} = \lambda_{VP} = \frac{2}{Eb}\int_\zeta^\xi Y_V(\xi)Y_P(\zeta,\xi)g(\zeta,\xi)d\xi \tag{24}$$

La integración es llevada a cabo a lo largo de toda la longitud de la fisura en el caso de λ_{VV} y a partir del refuerzo en el caso de λ_{PP}, λ_{PV} y λ_{VP}. Esto es debido a que para fisuras pequeñas que todavía no han cruzado el armado el factor de intensidad de tensiones K_{IP} es nulo.

En este momento ya hemos resuelto las ecuaciones de compatibilidad, pero para obtener una solución al problema debemos imponer una criterio para la propagación de la fisura. La condición impuesta es que la propagación de la fisura se produzca cuando el factor de intensidad de tensiones en el fondo de la fisura tenga un cierto valor K_{IC}, que se considera una propiedad del material. Mediante el principio de superposición obtenemos que el factor de intensidad de tensiones en el fondo de fisura sera la suma de los factores de intensidad de tensiones K_{IV} y K_{IP}.

$$K_{IC} = K_I = K_{IV} - K_{IP} \tag{25}$$

Donde K_{IV} y K_{IP} están definidos por las Eqs. 8 y 12. Indicamos que el signo negativo en la Eq. 25 viene dado por que el refuerzo se tracciona impidiendo la apertura de la fisura, tendencia opuesta a la que se expresa en los manuales de donde se obtiene K_{IP}.

La Eq. 25 conjuntamente con las Eqs. 22, 23, 24 resuelven el problema. No obstante dependiendo si el armado se encuentra en fase elástica o ha alcanzado su límite elástico, aparecen dos casos diferentes.

3.1. Caso 1: acero en regimen elástico

Si el armado se encuentra en regimen elástico, asumimos que la apertura de fisura, ω es nula al nivel del mismo. Introduciendo esta hipótesis en la Eq. 14 obtenemos que,

$$\Delta\omega = \Delta\omega_{PV} + \Delta\omega_{PP} = \lambda_{PV}V - \lambda_{PP}P = 0 \tag{26}$$

El valor de la Fuerza P puede ser obtenido directamente como función del cortante aplicado. Sustituyendo las Eqs. 22-24 en la Eq. 26,

$$\frac{P}{V} = \frac{\lambda_{PV}}{\lambda_{PP}} = \frac{\int_\zeta^\xi Y_V(\xi)Y_P(\zeta,\xi)g(\zeta,\xi)d\xi}{\int_\zeta^\xi Y_P^2(\zeta,\xi)g(\zeta,\xi)d\xi} \tag{27}$$

Considerando una relación rígido-plástica en el comportamiento del acero, el cortante para que se produzca la plastificación del acero viene dado por:

$$V_P = P_P\frac{\lambda_{PP}}{\lambda_{PV}} \tag{28}$$

donde $P_P = f_y A_s$ indica el valor de la tracción en el acero al alcanzar el límite elástico, f_y. A_s es la cuantía de acero colocada.

Para evaluar el cortante durante el proceso de fractura, necesitamos imponer la Eq. 25. El factor de intensidad de tensiones en el fondo de fisura sera igual a:

$$K_I = \frac{V}{h^{\frac{1}{2}}b} Y_V(\xi) - \frac{P}{h^{\frac{1}{2}}b} Y_P(\zeta,\xi) \qquad (29)$$

Imponiendo la condición $K_I = K_{IC}$ y reordenado la Eq. 29, obtenemos:

$$\frac{V}{K_{IC}h^{\frac{1}{2}}b} = \frac{1}{Y_V(\xi)}[1 + \frac{P}{K_{IC}h^{\frac{1}{2}}b} Y_P(\zeta,\xi)] \qquad (30)$$

introduciendo el valor de P en el caso en el que el acero no plastifica, Eq. 30, el cortante adimensionalizado, V_{adim}, durante el proceso de fractura viene dado por:

$$\frac{V}{K_{IC}h^{\frac{1}{2}}b} = \frac{1}{Y_V(\xi) - \frac{Y_P(\zeta,\xi)\lambda_{PV}}{\lambda_{PP}}} \qquad (31)$$

En la Eq. 31 observamos como, siempre que la trayectoria de la fisura sea independiente de las caracteristicas y cuantía de armado, el cortante, V, durante el proceso de propagación depende unicamente de la profundidad relativa de la fisura, ξ.

3.2. *Caso 2: acero en régimen plástico*

En este caso la fuerza transmitida por el armado es igual a $P_P = f_y As$. Sustituyendo esta condición en la Eq. 30 obtenemos

$$\frac{V}{K_{IC}h^{\frac{1}{2}}b} = \frac{1}{Y_V(\xi)}[1 + N_P Y_P(\zeta,\xi)] \qquad (32)$$

Donde N_P es el denominado número de fragilidad de Carpinteri para elementos de hormigón armado. Este número se define como:

$$N_P = \frac{f_y h^{\frac{1}{2}}}{K_{IC}} \frac{A_s}{A} \qquad (33)$$

Donde A es el área total de la sección, $(A = bh)$. La Eq. 32 define el cortante necesario cuando el acero ha alcanzado su límite elástico. En este caso la apertura de la fisura en la posición del armado, ω es diferente de cero.

Las Eqs. 31 y 32 definen el cortante durante el proceso de fractura.

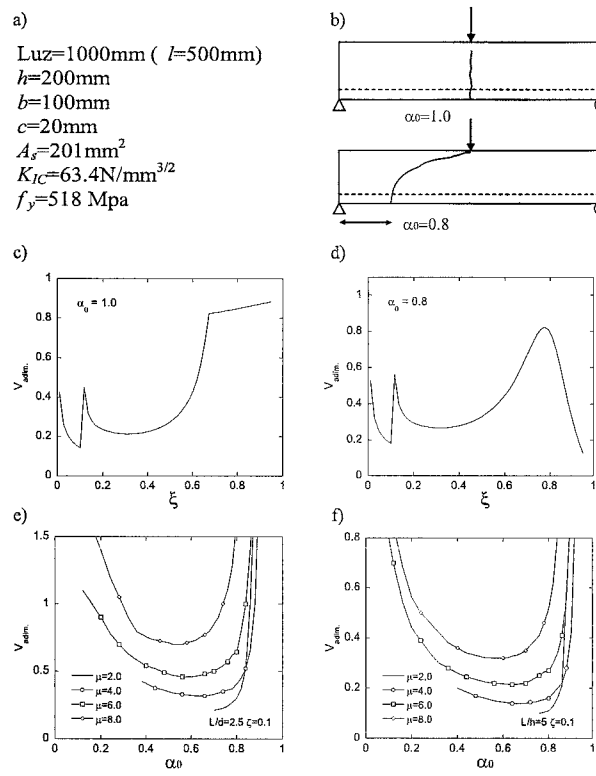

Figura 4: (a) Características del elemento modelado; (b) trayectorias de fisuras modeladas; (c) (d) cortante adimensional frente a la profundidad de fisura para α_0=1.0 y α_0=0.8 respectivamente;(e) (f) cortante para el que se produce el proceso de inestabilidad frente a la posición de iniciación de la fisura, α_0, para elementos de esbeltez $l/h = 2{,}5$ y $l/h = 5{,}0$ respectivamente.

4. INFLUENCIA DE LA POSICIÓN INICIAL DE LA FISURA

En esta sección mostramos un ejemplo de aplicación del modelo. En la Fig. 4a mostramos los datos seleccionados del elemento a modelar. En la Fig. 4b se representan dos croquis con las trayectorias de fisuras que se han modelado. El exponente, μ utilizado es igual a 4. En la Figs. 4c y d se representan en abcisas la profundidad relativa de la fisura y en ordenadas el cortante expresado de forma adimensionalizada, para los valores $\alpha_0 = 1{,}0$ y $0{,}8$ respectivamente. En la Fig. 4c apreciamos como tras cruzar la fisura el armado, existe una zona de propagación inestable, entendida ésta como propagación de la fisura cuando la carga desciende. Posteriormente se estabiliza este proceso y llegamos a un punto, $\xi \approx 0{,}7$, donde el acero plastifica. En la Fig. 4d el comienzo de la fisura es similar al del caso de $\alpha_0 = 1{,}0$, con una zona inestable tras cruzar el refuerzo, estabilizándose posteriormente. No obstante antes de llegar a la plastificación se produce un nuevo proceso de inestabilidad, $\xi \approx 0{,}75$, en el que la fisura crece atravesando el elemento. Este fenómeno de inestabilidad se corresponde con la denominada rotura por tracción diagonal.

Dependiendo de la posición inicial de la fisura la carga a la que se produce este efecto de inestabilidad varía. En las Figs. 4e y f, mostramos en abcisas la posición de la iniciación de la fisura adimensionalizada (en el apoyo α_0 tiene un valor 0 y en el centro de vano α_0 es igual a 1) y en ordenadas la carga para la que comienza este fenómeno de inestabilidad en forma adimensionalizada. Los resultados se han obtenido para diferentes valores del exponente μ, que define la forma de la parte parabólica de la fisura. En todos los casos se observa como existe una zona de mínimo aproximadamente entre α_0 igual a $0{,}4 - 0{,}7$. Este resultado indica que la fisuras generadas en esta zona son las que tienen una mayor probabilidad de desarrollar un comprotamiento inestable. Las fisuras situadas cercanas al C. V. necesitarían una carga muy elevada, produciendose antes la plastificación del armado que la propagación inestable. En el caso de las fisuras situadas cercanas al apoyo, en general la curvas $V_{adim} - \xi$ son decrecientes tras atravesar la fisura el armado, lo que indica un proceso de fisuración inestable, no obstante y debido al alto valor del cortante que es necesario para que se generen estas fisuras, el fallo del elemento se producira por la propagación de las fisuras situadas en el tramo central del semivano. Este mínimo en el valor del cortante dependiendo de la posición de la fisura ha sido tambien mostrado por Niwa [9], el cual realizó un análisis de la propagación de las fisuras mediante un modelo cohesivo, implementado en un programe de elementos finitos. Por último señalamos como al aumentar la esbeltez del elemento, l/h, si mantenemos constante el exponente μ, las cargas para generar un proceso inestable disminuyen.

5. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

Este artículo presenta un modelo basado en conceptos de mecánica de fractura elástica lineal para analizar la propagación de fisuras en elementos de hormigón armado sin armadura transversal. Hemos establecido una serie de hipótesis para aproximar el valor de los factores de intensidad de tensiones necesarios y de la trayectoria de las fisuras. El modelo capta un proceso de inestabilidad que hemos identificado con el denominado fallo por tracción diagonal. Este fallo que se produce para las fisuras que se inician en zonas donde existen tensiones normales y cortantes. Analizando el comportamiento de diversas fisuras dependiendo de la posición de su iniciación, hemos establecido una zona en la que existe una mayor probabilidad de que aparezca una fisura que tenga un comportamiento inestable durante su desarrollo. De esta forma podemos discriminar entre zonas susceptibles a la aparición de fisuras que desarrollen un comportamiento inestable y zonas donde la probabilidad de aparición de éstas es menor.

Como trabajo futuro establecemos el comparar los resultados generados con el modelo con la experimentación realizada. Asimismo se podrán establecer nuevas relaciones entre la forma de la fisura, la esbeltez del elemento y el número de fragilidad de Carpinteri. Finalmente diversas mejoras pueden ser introducidas tanto en la cuantificación de los factores de intensidad de tensiones, como en trayectorias de las fisuras.

AGRADECIMIENTOS

Jacinto Ruiz Carmona agradece a la Demarcación del Colegio de Ingenieros de Caminos de Castilla-La Mancha, así como al Ministerio de Educación y Ciencia a través del proyecto MAT2003-00843 la financiación concedida para sufragar los gastos durante la estancia de tres meses realizada en el Politecnico di Torino.

REFERENCIAS

[1] A. Carpinteri, Stability of fracturing process in RC beams. *Journal of Structural Engineering*, 110:544–558, 1998.

[2] C. Bosco, and A. Carpinteri, Fracture mechanics evaluation of minimum reinforcement in concrete structures. In *Applications of Fracture Mechanics to Reinforced Concrete*, A. Carpinteri, Ed., Elsevier Applied Science, London (1992), pp. 347–377.

[3] A. Carpinteri, and R. Massabo, Continous vs. discontinous bridged-crack model for fiber-reinforced materials in flexure. *International Journal of Solids and Structures*, 34(21):2321–2338, 1997.

[4] A. Carpinteri, G. Ferro, and G. Ventura, A fracture mechanics approach to over-reinforced concrete beams. In *Fracture Mechanics of Concrete Structures*, Li et al. Eds. (2004), pp. 903–910.

[5] A. Portela and M. H. Aliababi, *Crack Growth Analyses Using Boundary Elements*. Computational Mechanics Publications, Southampton. 1992.

[6] P. G. Gustafsson, *Fracture Mechanics Studies of non-Yielding Materials Like Concrete: Modeling of Tensile Fracture and Applied Strength Analyses*. Report No. TVBM-1007, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden. 1985.

[7] Y. S. Jenq, and S. P. Shah, Shear resistance of reinforced concrete beams. A fracture mechanics approach. In *Fracture Mechanics: Applications to Concrete*, V. Li and Z. P. Bažant, Eds., American Concrete Institute, Detroit (1989), pp. 273–258.

[8] H. Okamura, K. Watanabe, and T. Takano, Deformation and strength of cracked member under bending moment and axial force. In *Engineering Fracture Mechanics*, 7:531–539, 1975.

[9] J. Niwa, Size effect analyses for flexural strength of concrete beams using non linear rod element. *Proceedings of JCI*, 15(2):75–80, 1993.