Istituzioni di Algebra e Geometria — Algebra, AA. 2024-2025
Note sul gruppo diedrale

Queste note informali sono pensate per chiarire qualche dubbio che potete avere sui gruppi diedrali. Alcuni pezzi sono presi dalle dispense del corso di Algebra 2 di C. Casolo e mi sembra chiariscano la situazione rispetto al libro Conte-Picco Botta-Romagnoli, principalmente perché le notazioni non dipendono dalla numerazione dei vertici.

Fissiamo un intero $n \geq 3$ e sia $P = P_n$ un poligono regolare di n lati nel piano euclideo $\mathbb{R}^2$. Per convenienza, supponiamo che il centro di simmetria di P sia posto nell'origine $(0, 0)$ e che uno dei vertici di P appartenga al semiasse positivo delle ascisse.

Chiamiamo Δ_n l'insieme delle simmetrie di P, ovvero le isometrie α di $\mathbb{R}^2$ che preservano (o mandano in sé) il poligono P, cioè tali che $\alpha(P) = P$.

Una isometria di $\mathbb{R}^2$ è una applicazione $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che conserva la distanza, ovvero tale che $d(\alpha(x), \alpha(y)) = d(x, y)$ per ogni coppia di punti $x, y \in \mathbb{R}^2$.

Le isometrie sono biezioni e possono essere decomposte come prodotto di un operatore lineare ortogonale (ovvero rappresentabile con una matrice ortogonale A tale che ${}^tAA = I$) e di una traslazione. Poiché gli elementi di Δ_n lasciano fisso il centro di simmetria $(0, 0)$ di P, essi sono operatori lineari ortogonali, della forma $x \mapsto Ax$ dove $x \in \mathbb{R}^2$ è un vettore colonna, ovvero rotazioni (se $\det(A) = 1$) o riflessioni (se $\det(A) = -1$).

L'insieme Δ_n può essere dotato di una struttura di gruppo con la composizione di funzioni (che scriviamo nel seguito come prodotto): infatti l'identità $1 = id$ appartiene a Δ_n e se $\alpha, \beta \in \Delta_n$ allora $\alpha\beta \in \Delta_n$ e $\alpha^{-1} \in \Delta_n$.

L'insieme delle rotazioni costituisce un sottogruppo normale di indice 2 in Δ_n; esso è infatti il nucleo dell'omomorfismo suriettivo da Δ_n al gruppo moltiplicativo $\{1, -1\}$ che associa ad una isometria il determinante (il quale non dipende dalla base scelta) di una matrice ad essa associata.

Poiché chiaramente Δ_n contiene esattamente n rotazioni, deduciamo che Δ_n contiene n riflessioni e che $|\Delta_n| = 2n$.

Vogliamo trovare una rappresentazione uniforme per gli elementi di Δ_n: denotiamo con

- R la rotazione (in senso antiorario) di angolo $\theta = 2\pi/n$, e con
- δ la riflessione rispetto all'asse delle ascisse.

Ricordiamo dal corso di Algebra Lineare che, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$, ad R e δ sono associate, rispettivamente, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per ogni intero k,

$$D_k = R^k \delta$$

è la riflessione rispetto alla retta per l'origine che forma un angolo (misurato in senso antiorario) ampio $k\pi/n$ rispetto al semiasse positivo delle ascisse; D_k è una riflessione, dato che $\det(D_k) = -1$.

Osservando poi che la composizione di due riflessioni è una rotazione di angolo pari al doppio dell'angolo individuato dagli assi della prima e della seconda riflessione, da

$$R^k = D_k \delta^{-1} = D_k \delta$$

si deduce che l'asse della riflessione D_k forma con l'asse delle ascisse un angolo (misurato come usuale in senso antiorario) di ampiezza $k\pi/n$.

Gli elementi di Δ_n sono dunque:

- le rotazioni $\{1 = R^0,\ R,\ R^2, \dots,\ R^{n-1}\}$ e
- le riflessioni $\{\delta,\ R\delta,\ R^2\delta, \dots,\ R^{n-1}\delta\}$.

La tavola di moltiplicazione del gruppo Δ_n può essere ricavata osservando che (come si può verificare tramite le matrici associate o pensando alle simmetrie di P): R ha ordine n, δ ha ordine 2, e $\delta R = R^{-1}\delta$.

Segue dunque che, per ogni $0 \leq i < n$,

$$\delta R^i = R^{-i}\delta = R^j \delta$$

dove $0 \leq j < n$ è l'intero tale che $j \equiv -i \pmod{n}$.

Poiché $\delta^{-1} R \delta = \delta R \delta = R^{-1}$, deduciamo che il sottogruppo ciclico $<R>$ è un sottogruppo normale di Δ_n.

Osserviamo che per $n \geq 3$ il gruppo diedrale Δ_n non è commutativo.

Guardiamo adesso il gruppo Δ_3 più nel dettaglio, e scriviamone la tavola di moltiplicazione, cercando anche di interpretare queste nuove notazioni rispetto alle vecchie.

Partiamo dal triangolo e chiamiamo

- $R =$ la rotazione (in senso antiorario) di angolo $2\pi/3$
- $\delta =$ la riflessione rispetto all'asse delle ascisse.

Il gruppo Δ_3 ha $2 \cdot 3 = 6$ elementi, divisi in

- 3 rotazioni $\{1 = R^0,\ R,\ R^2\}$ e
- 3 riflessioni $\{D_0 = \delta,\ D_1 = R\delta,\ D_2 = R^2\delta\}$.

Per calcolare la tavola di moltiplicazione, oltre al fatto che R ha ordine 3 e le riflessioni D_i hanno tutte ordine 2, osserviamo che

1. $RD_0 = R\delta = D_1$;
2. $RD_1 = RR\delta = R^2\delta = D_2$;
3. $RD_2 = RR^2\delta = \delta = D_0$;
4. $D_0R = \delta R = D_1$;
5. $D_1R = R\delta R = RR^{-1}\delta = D_0$;
6. $D_2R = R^2\delta R = R^2R^{-1}\delta = R\delta = D_1$;
7. $D_0D_1 = \delta R\delta = R^{-1} = R^2$;
8. $D_1D_0 = R\delta\delta = R$;
9. $D_0D_2 = \delta R^2\delta = R^{-2}\delta\delta = R^{-2} = R$;
10. $D_2D_0 = R^2\delta\delta = R^2$;
11. $D_1D_2 = R\delta R^2\delta = RR^{-2}\delta\delta = R^2$;
12. $D_2D_1 = R^2\delta R\delta = R^2R^{-1}\delta\delta = R$;
13. etc...

Alla troviamo la seguente tavola di moltiplicazione:

	1	R	R^2	D_0	D_1	D_2
1	1	R	R^2	D_0	D_1	D_2
R	R	R^2	1	D_2	D_0	D_1
R^2	R^2	1	R	D_1	D_2	D_0
D_0	D_0	D_1	D_2	1	R	R^2
D_1	D_1	D_2	D_0	R^2	1	R
D_2	D_2	D_0	D_1	R	R^2	1

N.B. Se qualche cosa non vi è chiara, e/o se pensate di aver trovato un errore di stampa, fatemi sapere!