Istituzioni di Algebra e Geometria — Algebra, a.a. 2023-2024
Soluzioni foglio 8

1. Abbiamo che $\gamma = 1 + \alpha^2 = 1 + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, quindi il suo polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ ha grado almeno 2. Poiché
$$\gamma - 1 = \sqrt{2},$$
elevando al quadrato entrambi i membri dell'equazione segue che
$$\gamma^2 - 2\gamma + 1 = 2,$$
e quindi il polinomio $p(x) = x^2 - 2x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ e si annulla in $1 + \alpha^2$. L'altra radice (in $\mathbb{R}$) di $p(x)$ è $1 - \sqrt{2}$, e nemmeno questa radice appartiene a $\mathbb{Q}$. Quindi $p(x)$ è un polinomio di grado 2 che non ha radici in $\mathbb{Q}$, e quindi irriducibile su $\mathbb{Q}$: in conclusione, è il polinomio minimo cercato.

2. Sia $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{7}$; allora
$$\alpha^2 = 10 + 2\sqrt{21},$$
quindi
$$\alpha^4 - 20\alpha^2 + 100 = 84.$$
Deduciamo che $x^4 - 20x^2 + 16$ ha α come radice. Inoltre tale polinomio si scompone su $\mathbb{R}$ come
$$(x - \sqrt{10 - 2\sqrt{21}})(x - \sqrt{10 + 2\sqrt{21}})(x + \sqrt{10 - 2\sqrt{21}})(x + \sqrt{10 + 2\sqrt{21}}),$$
quindi ha $\pm\sqrt{10 \pm 2\sqrt{21}}$ come sue radici in $\mathbb{R}$.
Si noti che $x^2 - 21$ ha $\sqrt{21}$ come radice: per il criterio di Eisenstein è irriducibile in $\mathbb{Q}$, dunque in $\mathbb{Q}$ per il lemma di Gauss. Concludiamo che il polinomio minimo di $\sqrt{21}$ su $\mathbb{Q}$ è $x^2 - 21$, quindi $\sqrt{21} \notin \mathbb{Q}$. Allora $10 \pm 2\sqrt{21} \notin \mathbb{Q}$, dunque $\pm\sqrt{10 \pm 2\sqrt{21}} \notin \mathbb{Q}$. Quindi se $x^4 - 20x^2 + 16$ fosse riducibile su $\mathbb{Q}$ allora si dovrebbe scomporre in un prodotto di due polinomi di grado 2 a coefficienti in $\mathbb{Q}$: verificate che questo non è possibile. Concludiamo che $x^4 - 20x^2 + 16$ è il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$.
Provate a calcolare voi, con metodi simili, che i polinomi minimi di $\sqrt{1 + \sqrt{3}}$ e $1 - \sqrt[3]{5}$ sono, rispettivamente, $x^4 - 2x^2 - 2$ e $x^3 - 3x^2 + 3x + 4$.

3. (a) Il criterio di Eisenstein garantisce che il polinomio $p(x)$ è irriducibile, dunque K è un campo.
   (b) Sappiamo che ogni elemento di K si scrive in maniera unica come polinomio di grado al più 3 in $\overline{x}$. Se $u = a\overline{x}^3 + b\overline{x}^2 + c\overline{x} + d$ con $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, allora
   $$u^2 = a^2\overline{x}^6 + 2ab\overline{x}^5 + (b^2 + 2ac)\overline{x}^4 + (2bc + 2ad)\overline{x}^3 + (c^2 + 2bd)\overline{x}^2 + 2cd\overline{x} + d^2.$$
   In K si sa che $\overline{x}^4 = 2$, quindi la relazione $\overline{x}^2 + 1 = 0$ diviene
   $$(2bc + 2ad)\overline{x}^3 + (c^2 + 2a^2 + 2bd)\overline{x}^2 + (2cd + 4ab)\overline{x} + d^2 + 2b^2 + 4ac + 1 = 0,$$

quindi deve essere

$$bc + ad = 0, \qquad c^2 + 2a^2 + 2bd = 0, \qquad 2cd + 4ab = 0, \qquad d^2 + 2b^2 + 4ac + 1 = 0,$$

perché $(1, \overline{x}, \overline{x}^2, \overline{x}^3)$ è una base di K come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$. Dall'ultima equazione deduciamo che necessariamente $ac < 0$, cioè a e c hanno segno opposto. Poiché dalla prima equazione ricaviamo che $d = -bc/a$, deduciamo che $bd \geq 0$. La seconda equazione implica allora $a = c = 0$, in contraddizione con quanto osservato. Quindi non esiste $u \in K$ tale che $u^2 + 1 = 0$.

4. (a) $[K_\alpha : \mathbb{Q}]$ è il grado del polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$, che è 2 per ipotesi.

   (b) L'elemento β è algebrico su $\mathbb{Q}$: poiché il suo polinomio minimo ha coefficienti in $\mathbb{Q} \subseteq K_\alpha$, segue che β è anche algebrico su K_α con polinomio minimo di grado al più 2: deduciamo allora che $K_{\alpha,\beta} = K_\alpha[\beta] \subseteq \mathbb{C}$ è un sottocampo.
   Abbiamo che $[K_\alpha : \mathbb{Q}] = 2$ e $[K_{\alpha,\beta} : K_\alpha] \leq 2$. Allora

   $$[K_{\alpha,\beta} : \mathbb{Q}] = [K_{\alpha,\beta} : K_\alpha][K_\alpha : \mathbb{Q}]$$

   può essere o 2 o 4.

   (c) Sappiamo che $K_{\alpha,\beta} = K_\alpha[\beta]$ è un campo tale che $[K_{\alpha,\beta} : \mathbb{Q}] \leq 4$. Poiché

   $$\mathbb{Q} \subseteq K_{\alpha+\beta}, K_{\alpha\beta} \subseteq K_{\alpha,\beta}$$

   quindi $K_{\alpha+\beta}$ e $K_{\alpha\beta}$ sono estensioni finite di $\mathbb{Q}$, quindi $\alpha + \beta$ e $\alpha\beta$ sono algebrici su $\mathbb{Q}$. Osserviamo che $K_{\alpha+\beta}$ e $K_{\alpha\beta}$ sono sottospazi di $K_{\alpha,\beta}$. Inoltre

   $$[K_{\alpha,\beta} : \mathbb{Q}] = [K_{\alpha,\beta} : K_{\alpha+\beta}][K_{\alpha+\beta} : \mathbb{Q}] = [K_{\alpha,\beta} : K_{\alpha\beta}][K_{\alpha\beta} : \mathbb{Q}],$$

   quindi $[K_{\alpha+\beta} : \mathbb{Q}]$ e $[K_{\alpha\beta} : \mathbb{Q}]$ devono dividere $[K_{\alpha,\beta} : \mathbb{Q}]$.

5. (a) Osserviamo che $x^2 - 2 \in \mathbb{Z}[x] \subseteq \mathbb{Q}[x]$ è monico, irriducibile su $\mathbb{Z}$ per il criterio di Eisenstein, dunque su $\mathbb{Q}$, e ha $\sqrt{2}$ come radice: quindi coincide con il polinomio minimo di $\sqrt{2}$ su $\mathbb{Q}$. In particolare questo implica che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

   (b) Sappiamo che $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ è un campo i cui elementi si scrivono in modo unico nella forma $a + b\sqrt{2}$ con $a, b \in \mathbb{Q}$. Osserviamo che $(\sqrt{2})^{-1} = a + b\sqrt{2}$, se e solo se $1 = a\sqrt{2} + 2b$: concludiamo che deve essere $a = 0$, $b = 1/2$.

   (c) Se $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ allora esisterebbero $a, b \in \mathbb{Q}$ tali che $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$, dunque

   $$3 - a^2 - 2b^2 = 2ab\sqrt{2}.$$

   Se fosse $ab \neq 0$, seguirebbe

   $$\sqrt{2} = \frac{3 - a^2 - 2b^2}{2ab} \in \mathbb{Q},$$

   in contraddizione con il fatto che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Quindi dovrebbe essere $ab = 0$: lascio a voi verificare che anche tale uguaglianza conduce a una contraddizione.

(d) Nell'esercizio precedente abbiamo verificato che la somma di elementi algebrici è un elemento algebrico: inoltre poiché il polinomio minimo di $\sqrt{3}$ su $\mathbb{Q}$ è x^2-3, segue che $\sqrt{3}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$, dunque $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$. Usate l'esercizio precedente per mostrare che il grado del suo polinomio minimo è 4.

6. (a) Chiaramente $1+i\sqrt{5}\notin\mathbb{Q}$, quindi il suo polinomio minimo ha grado ≥ 2. Osserviamo che

$$(x-1-i\sqrt{5})(x-1+i\sqrt{5}) = x^2-2x+6 \in \mathbb{Q}[x]:$$

concludiamo che x^2-2x+6 è il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$.

(b) Questa la lascio a voi

(c) Poiché K è contenuto nell'insieme degli elementi algebrici su $\mathbb{Q}$, K è numerabile, quindi non può contenere $\mathbb{R}$ che è più che numerabile.

7. (a) Si noti che -1 è radice di $p(x)$, quindi per Ruffini $x+1$ divide $p(x)$ e il quoziente è x^2-x+2 che è irriducibile in $\mathbb{R}$, dunque anche in $\mathbb{Q}$.

(b) L'elemento $\alpha\notin\mathbb{Q}$ è una radice di $p(x)$ se e solo se α è radice di x^2-x+2 che è monico e irriducibile su $\mathbb{Q}$. In particolare x^2-x+2 è il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$, dunque $[K_\alpha:\mathbb{Q}]=2$.

(c) Poiché $[K_\alpha:\mathbb{Q}]=2$, segue che una base di K_α come spazio vettoriale su K è $\{1,\alpha\}$. Se $u=a+b\alpha\in K_\alpha$ con $a,b\in\mathbb{Q}$ è tale che $u^2+1=0$ allora

$$a^2+2ab\alpha+b^2\alpha^2+1=0.$$

Tenendo conto che $\alpha^2=\alpha-2$ in K_α segue che

$$a^2-2b^2+1+(2a+b)b\alpha=0$$

Se fosse $(2a+b)b\neq 0$ si dedurrebbe che

$$\alpha=-\frac{a^2-2b^2+1}{(2a+b)b}\in\mathbb{Q}.$$

Dalla contraddizione deduciamo che o $b=0$ o $b=-2a$. Nel primo caso avremmo $a^2+1=0$, in contraddizione con la condizione $a\in\mathbb{Q}$. Nel secondo caso $7b^2=1$, in contraddizione con la condizione $b\in\mathbb{Q}$. Concludiamo che un elemento u con le proprietà indicate non esiste.

N.B. Ricordate che in generale il metodo per risolvere un esercizio non è unico. Se qualche cosa non vi è chiara, e/o se pensate di aver trovato un errore di stampa, fatemi sapere!