Istituzioni di Algebra e Geometria — Algebra, a.a. 2023-2024

Soluzioni foglio 1

1. L'unica tra le 3 corrispondenze che è anche un'applicazione è la X. La Y associa al 2 sia l'1/2 che il 3/4, quindi non va bene. La Z invece non associa niente al 4: sarebbe un'applicazione se restringessimo il dominio a $A \setminus \{4\}$.

2. L'unica tra le 3 corrispondenze che è anche un'applicazione è la X, che associa ad ogni $x \in [0, +\infty)$ il valore $y = x^2$, che è ben definito e univocamente determinato. La Y non è una applicazione perchè ad ogni x restano associati i 2 valori $(\pm y)^2$: sarebbe un'applicazione se restringessimo il codominio a $[0, +\infty)$. Infine la Z non è un'applicazione per lo stesso motivo di Y, ed anche lei sarebbe un'applicazione se restringessimo il codominio a $[0, +\infty)$.

3.
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[r, shift right, "\varphi'"'] & Y \arrow[r, shift left, "\psi"] \arrow[r, shift right, "\psi'"'] & Z \end{tikzcd}$$

   (a) Siano $x_1, x_2 \in X$ tali che $(\psi \circ \varphi)(x_1) = (\psi \circ \varphi)(x_2)$. Allora $\psi(\varphi(x_1)) = \psi(\varphi(x_2))$; siccome ψ è iniettiva, deve valere $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. Siccome anche φ è iniettiva, deve valere $x_1 = x_2$.

   (b) e (c) le lascio a voi.

   (d) Supponiamo che φ sia biettiva e che la composizione $\psi \circ \varphi$ sia suriettiva, e sia $z \in Z$. Poiché $\psi \circ \varphi$ è suriettiva, $\exists\, x \in X$ tale che $z = \psi(\varphi(x))$: ma allora $z = \psi(y)$ appartiene all'immagine di ψ, cioè ψ è suriettiva. Il viceversa segue direttamente dalla parte (b), perché biettiva implica suriettiva.

   (e) Sia $x \in X$, e consideriamo i due elementi $\varphi(x), \varphi'(x) \in Y$. Sappiamo che $(\psi \circ \varphi)(x) = (\psi \circ \varphi')(x)$, e quindi $\psi(\varphi(x)) = \psi(\varphi'(x))$. Poiché ψ è iniettiva, questo implica $\varphi(x) = \varphi'(x)$, cioè $\varphi = \varphi'$.

   (f) per voi.

4. (a) Sia $y \in Y$; ci domandiamo se $(\varphi \circ \psi_i)(y) = y$. Se $y \neq \bar{y}$, allora $(\varphi \circ \psi_i)(y) = (\varphi \circ \psi)(y) = y$, mentre se $y = \bar{y}$ allora $(\varphi \circ \psi_i)(\bar{y}) = \varphi(\psi_i(\bar{y})) = \varphi(x_i) = \bar{y}$, quindi siamo a posto.

   (b) Semplicemente, se φ non fosse iniettiva allora avrei $x_i, x_2 \in X$ tali che $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, quindi applicando quanto visto nella parte (a) potrei costruire due inverse destre diverse.

5. (a) Lascio a voi la verifica che le ψ_i sono entrambe inverse sinistre di φ.

   (b) Semplicemente, se esistesse $y \in Y \setminus \mathrm{Im}(\varphi)$ potremmo costruire due inverse sinistre distinte come nella parte (a).

6. (a) Questa dimostrazione la trovate nelle dispense del Prof. Casnati.

   (b) Dobbiamo dimostrare che per ogni $n \geq 1$ e per ogni $a \in [-1, +\infty)$ si ha $(1+a)^n \geq 1 + na$.
   Se $n = 1$ allora $(1+a)^1 = 1 + a = 1 + 1a$ ✓
   Se $n > 1$ allora $(1+a)^{n+1} = (1+a)(1+a)^n$. Ora $1 + a \geq 0$ perchè per ipotesi $a \geq 1$, mentre $(1+a)^n \geq 1 + na$ per ipotesi induttiva. In totale quindi

   $$(1+a)^{n+1} = (1+a)(1+a)^n \geq (1+a)(1+na) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a,$$

   dove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che $na^2 \geq 0$. ✓

   (c) Se $n = 0$ allora $1 + a^{2^0} = 1 + a = \frac{1-a^2}{1-a}$ ✓
   Se $n > 0$, allora calcoliamo

   $$\prod_{h=0}^{n+1}(1+a^{2^h}) = (1+a^{2^{n+1}})\prod_{h=0}^{n}(1+a^{2^h}) = (1+a^{2^{n+1}})(\frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}) = \frac{1-(a^{2^{n+1}})^2}{1-a} = \frac{1-a^{2^{n+2}}}{1-a}. \quad ✓$$

   (d) Questa la lascio a voi.

7. (a) Questa è una relazione di equivalenza, in quanto è riflessiva ($a \sim a$ perché 0 è pari), transitiva (se $a \sim b$ e $b \sim c$ allora $a - c = (a-b) + (b-c)$ è pari) e ovviamente simmetrica ($a - b$ è pari se e solo se $b - a$ è pari). (Non è altro che la relazione di congruenza modulo 2...)

   (b) L'unica proprietà di cui gode questa relazione è la simmetria: $a - b$ è dispari se e solo se $b - a$ è dispari, le altre falliscono tutte (a voi i dettagli).

   (c) Questa relazione è riflessiva ($a \sim a$ perché $a = 1a$) e transitiva (se $a \sim b$ e $b \sim c$ significa che esistono $p, q \in \mathbb{N}$ tali che $a = pb$ e $b = qc$, quindi $a = (pq)c$, cioè $a \sim c$). Però non è simmetrica: se $a \sim b$ allora $a = qb$, e quindi $b = (1/q)a$, ma in generale se $q \in \mathbb{N}$ allora $q \notin \mathbb{N}$. Questo ragionamento però ci fa capire che la relazione è antisimmetrica: se $a \sim b$ e $b \sim a$ significa che sia q che $1/q$ sono numeri naturali, e questo succede se e solo se $q = 1$.

   (d) Per voi, è quasi uguale al punto precedente.

   (e) Un'altra relazione di equivalenza: è immediato verificare che valgono le tre proprietà riflessiva, transitiva, simmetrica.

   (f) Lascio a voi mostrare che questa è una relazione di equivalenza.

   (g) Invece l'unica proprietà di cui gode questa relazione è la simmetria: $\ell \perp \ell'$ se e solo se $\ell' \perp \ell$. La relazione non è riflessiva (una retta non è perpendicolare a se stessa), né transitiva (se $\ell \perp \ell'$ e $\ell' \perp \ell''$ nel piano, allora $\ell \parallel \ell''$), né antisimmetrica.

(h) Ancora una relazione di equivalenza, detta *coniugio*. Infatti vale la riflessività ($A \sim A$ con $P = I_n$), la transitività (se $A \sim B$ allora $A = P^{-1}BP$, se $B \sim C$ allora $B = Q^{-1}CQ$, e quindi

$$A = P^{-1}BP = P^{-1}Q^{-1}CQP = (QP)^{-1}C(QP),$$

dove QP è invertibile), e la simmetria (se $A \sim B$ allora $A = P^{-1}BP$ e quindi $B = PAP^{-1} = (P^{-1})^{-1}A(P^{-1})$ cioè $B \sim A$ tramite P^{-1}).

(i) Anche questa è una relazione di equivalenza, detta *congruenza*: a voi i dettagli.

(j) Lascio a voi dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza (che poi corrisponde alla relazione di isomorfismo tra spazi vettoriali finitamente generati su un campo dato).

8. (a) La relazione è antisimmetrica, riflessiva e transitiva, quindi è una relazione d'ordine. Non tutti gli interi sono multipli gli uni degli altri, quindi l'ordinamento è parziale.

   (b) Anche questa è una relazione d'ordine, anche questa parziale.

   (c) Idem come sopra.

   (d) Anche quest'ultima è una relazione d'ordine, ma questa è totale: data una qualsiasi coppia di elementi di $A^{\mathbb{N}}$ guardando le loro componenti ad una a una o sono tutte uguali o ad un certo punto una è associata ad un numero più piccolo dell'altra.

9. Lascio a voi la (a) e la (c).

   (b) Fissiamo $i \in I_n$; se $j \neq i, n+1$ l'applicazione τ_i coincide con l'identità, quindi è biettiva su $I_n \setminus \{i, n+1\}$. Se $j = i, n+1$ allora l'applicazione τ_i scambia i due numeri, quindi anche sull'insieme $\{i, n+1\}$ l'applicazione è biettiva.

10. (a) Poiché $\mathbb{Z}$ è numerabile, esiste una biezione $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$. Definiamo allora

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : \mathbb{N} &\to q\mathbb{Z} \\ i &\mapsto q\varphi(i); \end{aligned}$$

a voi la verifica che $\bar{\varphi}$ è una biezione.

   (b) Una possibile biezione $\mathbb{N} \to X \times Y$ è $n \mapsto (\varphi(n), \psi(n))$: l'iniettività e la suriettività vengono in un certo senso "ereditate" da quelle di φ e ψ. Osserviamo che questo implica, con un ragionamento per induzione, che il prodotto cartesiano finito di un numero finito di insiemi numerabili è ancora numerabile.

   (c) L'enunciato è vero non solo per I_2, ma più in generale per ogni I_m. La biezione cercata è

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : \mathbb{N} &\to X \cup I_m \\ i &\mapsto \begin{cases} i & \text{se } 1 \leq i \leq m \\ \varphi(i-m) & \text{se } i > m \end{cases} \end{aligned}$$

11. (a) Sia $A' \subseteq A \subseteq B$ e $\varphi\colon A \to A'$. Definiamo

$$\begin{aligned} \psi\colon B &\longrightarrow B' = A' \cup (B \setminus A) \\ b &\longrightarrow \begin{cases} \varphi(b) & \text{se } b \in A, \\ b & \text{se } b \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

Supponiamo che φ sia iniettiva e siano $b_1, b_2 \in B$ tali che $\psi(b_1) = \psi(b_2)$. Se $b_1, b_2 \in A$ allora $\psi(b_1) = \varphi(b_1) = \varphi(b_2) = \psi(b_2)$ e siccome φ è iniettiva, $b_1 = b_2$. Se $b_1, b_2 \notin A$ allora $\psi(b_1) = b_1 = b_2 = \psi(b_2)$. Infine se $b_1 \in A$ e $b_2 \notin A$ allora $\psi(b_1) = \varphi(b_1) = b_2 = \psi(b_2)$ implica $b_2 = \varphi(b_1) \in A' \subseteq A$, quindi questo caso non può capitare.

Viceversa, supponiamo che ψ sia iniettiva, e siano $a_1, a_2 \in A$ tali che $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$. Ma in questo caso $\varphi(a_1) = \psi(a_1) = \psi(a_2) = \varphi(a_2)$, e siccome ψ è iniettiva, $a_1 = a_2$.

(c) A lezione l'8 marzo abbiamo dimostrato che A è infinito se e solo se esiste un'applicazione iniettiva $f : \mathbb{N} \to A$. D'altra parte A contiene un sottoinsieme numerabile A' se e solo se esiste una biezione $g : \mathbb{N} \to A'$, e quindi anche un'iniezione $f = i \circ g : \mathbb{N} \to A$. Questo dimostra anche la parte (b), a voi i dettagli.

12. Lascio a voi verificare che la seguente applicazione è una biezione:

$$\begin{aligned} \varphi : A \times B &\to B \times A \\ (a, b) &\mapsto (b, a). \end{aligned}$$

13. Abbiamo visto la soluzione di questo esercizio durante la lezione del 12 ottobre, con due possibili dimostrazioni.

14. (a) È sufficiente osservare che un qualsiasi elemento di $\mathbb{Q}[x]_m$ è della forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m;$$

questo ci permette di stabilire una biezione tra $\mathbb{Q}[x]_m$ e $\mathbb{Q}^m$ (il prodotto cartesiano di $\mathbb{Q}$ per se stesso m volte), tramite $p(x) \mapsto (a_0, a_1, \ldots, a_m)$. Poiché $\mathbb{Q}^m$ è numerabile (si veda l'esercizio 10 (b)), segue che lo stesso vale per $\mathbb{Q}[x]_m$.

(b) La verifica dell'uguaglianza la lascio a voi, a quel punto la numerabilità è conseguenza dell'affermazione dell'esercizio 13.

(c) Per dimostrare che $\mathbb{Z}[x]$ è numerabile basta osservare che $\mathbb{Z}[x] \subseteq \mathbb{Q}[x]$.

(d) È chiaramente falso che l'insieme $\mathbb{C}[x]$ è numerabile, poiché contiene come sottoinsieme $\mathbb{C}$ stesso, che non è numerabile.

N.B. Ricordate che in generale il metodo per risolvere un esercizio non è unico. Se qualche cosa non vi è chiara, e/o se pensate di aver trovato un errore di stampa, fatemi sapere!