Istituzioni di Algebra e Geometria — Algebra, a.a. 2023-2024
Esercizi, foglio 8

1. Sia $\alpha = \sqrt[4]{2} \in \mathbb{R}$. Calcolare il polinomio minimo di $1 - \alpha^2$ su $\mathbb{Q}$.

2. Calcolare il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ di
$$\sqrt{3} + \sqrt{7}, \qquad \sqrt{1 + \sqrt{3}}, \qquad 1 - \sqrt[3]{5}.$$

3. Siano $p(x) = x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$, $I = (p(x))$ e $K = \mathbb{Q}[X]/I$.
   (a) Verificare che K è un campo.
   (b) Dimostrare che non esiste $u \in K$ tale che $u^2 + 1 = 0$.

4. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ due elementi algebrici su $\mathbb{Q}$, e supponiamo che i loro polinomi minimi su $\mathbb{Q}$ abbiano entrambi grado 2.
   (a) Dimostrare che $K_\alpha = \mathbb{Q}[\alpha] \subseteq \mathbb{C}$ è un sottocampo tale che $[K_\alpha : \mathbb{Q}] = 2$.
   (b) Dimostrare che $K_{\alpha,\beta} = K_\alpha[\beta]$ è un sottocampo di $\mathbb{C}$, e calcolare i possibili valori di $[K_{\alpha,\beta} : \mathbb{Q}]$.
   (c) Dedurre che $\alpha + \beta$ e $\alpha\beta$ sono algebrici su $\mathbb{Q}$; quali sono i possibili valori del grado dei polinomi minimi su $\mathbb{Q}$ di $\alpha + \beta$ e $\alpha\beta$?

5. Sia $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{p(\sqrt{2}) \in \mathbb{C} \mid p(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$.
   (a) Calcolare il polinomio minimo di $\sqrt{2}$ su $\mathbb{Q}$.
   (b) Determinare $a, b \in \mathbb{Q}$ per cui vale l'uguaglianza $(\sqrt{2})^{-1} = a + b\sqrt{2}$.
   (c) Verificare che $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
   (d) Mostrare che $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ è algebrico e calcolare il grado del suo polinomio minimo (su $\mathbb{Q}$).

6. Sia $\alpha = 1 + i\sqrt{5} \in \mathbb{C}$.
   (a) Verificare che α è algebrico su $\mathbb{Q}$ e se ne trovi il polinomio minimo $p(x)$.
   (b) Verificare che $K = \mathbb{Q}[\alpha]$ è un campo, estensione algebrica di $\mathbb{Q}$ di dimensione 2.
   (c) È vero o falso che K è un'estensione di $\mathbb{R}$?

7. Si consideri il polinomio $p(x) = x^3 + x + 2$.
   (a) Determinare i fattori irriducibili di $p(x)$ in $\mathbb{Q}[x]$.
   (b) Sia $\alpha \notin \mathbb{Q}$ una radice di $p(x)$ e sia $K_\alpha = \mathbb{Q}[\alpha] \subseteq \mathbb{C}$: calcolare $[K_\alpha : \mathbb{Q}]$.
   (c) Mostrare che non può esistere un elemento $u \in K_\alpha$ tale che $u^2 + 1 = 0$.

N.B. Ricordate che in generale il metodo per risolvere un esercizio non è unico. Se qualche cosa non vi è chiara, e/o se pensate di aver trovato un errore di stampa, fatemi sapere!