

Istituzioni di Algebra e Geometria — Algebra, a.a. 2023-2024
Esercizi, foglio 5

1. Sia $\mathbb{R}^{2,2}$ l'insieme delle matrici quadrate d'ordine 2 a coefficienti in \mathbb{R} . Stabilire quale dei seguenti insiemi ne è un sottoanello, un sottoanello unitario, un sottoanello commutativo, un sottogruppo additivo ma non un sottoanello.

(a) $L = \{ (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid a_{12} = 0 \}$.

(b) $A = \{ (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid a_{11} = a_{22} = 0 \}$.

(c) $B = \{ (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid a_{11} = a_{22} = a_{21} = 0 \}$.

(d) $C = \{ (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid a_{12} = a_{22} = a_{21} = 0 \}$.

2. Sia A un anello. Dimostrare che il centro di A :

$$Z(A) = \{a \in A \mid ab = ba \forall b \in A\}$$

è un sottoanello di A .

3. Sia A un anello con $1_A \neq 0_A$.

(a) Sia $a \in A$: è vero o falso che se $ab = b$ per ogni $b \in A$ allora $a = 1_A$?

(b) Sia $a \in A$ invertibile: dimostrare che il suo inverso moltiplicativo, se esiste, è unico.

4. Sia A un anello, X un insieme non vuoto. Se $\varphi, \psi \in A^X$, definiamo come sempre:

$$\begin{aligned} \varphi + \psi: X &\rightarrow A \\ x &\mapsto \varphi(x) + \psi(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi\psi: X &\rightarrow A \\ x &\mapsto \varphi(x)\psi(x). \end{aligned}$$

(a) Verificare che A^X con tali operazioni è un anello.

(b) Dimostrare che A^X è commutativo se e solo se A è commutativo.

(c) Dimostrare che A^X è unitario se e solo se A è unitario.

5. Sia A un anello con $1_A \neq 0_A$, X un insieme non vuoto.

(a) Determinare gli elementi invertibili dell'anello A^X definito nell'esercizio precedente.

(b) È vero o falso che A^X è un corpo se e solo se A è un corpo?

(c) È vero o falso che A^X contiene sempre divisori di zero (non nulli)?

6. Sia A un anello con $1_A \neq 0_A$, X un insieme non vuoto. Per ogni $x \in X$ fissato siano

$$I_x = \{\varphi \in A^X \mid \varphi(x) = 0_A\}, \quad J_x = \{\varphi \in A^X \mid \varphi(x) = 1_A\}.$$

- (a) Dimostrare che I_x è un ideale proprio in A^X .
- (b) Stabilire se J_x è un ideale.
- (c) Siano $x', x'' \in X$, $x' \neq x''$: dimostrare che $I_{x'} + I_{x''}$ contiene l'unità di A^X .

7. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- (a) Esiste un unico omomorfismo di anelli $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.
- (b) Esiste un unico omomorfismo di anelli $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$.
- (c) Esiste un unico omomorfismo di anelli $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- (d) L'applicazione $z \mapsto \bar{z}$ è un omomorfismo di anelli $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

8. Sia G un gruppo abeliano. Se $\varphi, \psi \in \text{End}(G)$ si definisca l'applicazione somma $\varphi + \psi: G \rightarrow G$ tale che $g \mapsto \varphi(g) + \psi(g)$. Si ponga poi $\varphi\psi = \varphi \circ \psi$.

- (a) Dimostrare che l'insieme $\text{End}(G)$ con queste due operazioni è un anello unitario.
- (b) È vero o falso che $\text{End}(G)$ è commutativo?
- (c) Sia $I = \{\varphi \in \text{End}(G) \mid \text{se } g \text{ ha ordine finito allora } \varphi(g) = 0_G\}$: verificare che I è un ideale bilatero di $\text{End}(G)$.

9. Sia A un anello con $0_A \neq 1_A$. Si supponga che l'applicazione $\varphi: A \rightarrow A$ definita da $\varphi(a) = a^2$ sia un omomorfismo di anelli.

- (a) È vero o falso che A ha caratteristica 2?
- (b) Dimostrare che A è commutativo.
- (c) Verificare che se $a \in \ker(\varphi)$ allora $1_A + a$ è invertibile.
- (d) Dare un esempio di un anello A in cui l'applicazione φ sopra sia un omomorfismo.

10. Siano A e B due anelli unitari. Per ogni coppia $(a, b), (a', b') \in A \times B$ poniamo:

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'), \quad (a, b) \cdot (a', b') = (aa', bb').$$

- (a) Dimostrare che $A \times B$ con tali operazioni è un anello.
- (b) Verificare che $A \times B$ è commutativo se e solo se sia A che B lo sono.

(c) Consideriamo le applicazioni

$$\begin{aligned}i_A: A &\rightarrow A \times B \\ a &\mapsto (a, 0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_A: A \times B &\rightarrow A \\ (a, b) &\mapsto a.\end{aligned}$$

Definiamo poi in maniera simile $i_B: B \rightarrow A \times B$ e $p_B: A \times B \rightarrow B$.

Stabilire quali fra i_A, i_B, p_A, p_B sono omomorfismi d'anelli.

(d) Verificare che $\text{Im}(i_A)$ e $\text{Im}(i_B)$ sono ideali di $A \times B$ generati rispettiv. da $(1_A, 0)$ e $(0, 1_B)$.

11. Sia A un anello commutativo con unità e I un suo ideale. Il **radicale** di I è

$$\sqrt{I} = \{a \in A \mid \text{esiste } n \in \mathbb{N} \text{ tale che } a^n \in I\}.$$

- (a) Verificare che $I \subseteq \sqrt{I}$.
- (b) Dimostrare che se $a \in \sqrt{I}$ allora esiste $N \in \mathbb{Z}$ tale che $a^m \in I$ per ogni $m \geq N$.
- (c) Verificare che se $a, b \in \sqrt{I}$ allora anche $-a$ e $a + b$ sono in \sqrt{I} .
- (d) Dedurre che \sqrt{I} è un ideale.

12. Siano A e B due anelli unitari.

- (a) Siano $I \subseteq A$ e $J \subseteq B$ ideali: dimostrare che $I \times J \subseteq A \times B$ è un ideale.
- (b) Sia $H \subseteq A \times B$ un ideale: dimostrare che $I = p_A(H) \subseteq A$ e $J = p_B(H) \subseteq B$ sono ideali.
- (c) Verificare che $p_A^{-1}(I) \cap p_B^{-1}(J) \subseteq A \times B$ è un ideale contenente H .
- (d) Dimostrare che se $(a, b) \in p_A^{-1}(I) \cap p_B^{-1}(J)$, allora esistono $a' \in A$ e $b' \in B$ tali che $(a, b'), (a', b) \in H$: calcolare $(1_A, 0)(a, b')$ e $(0, 1_B)(a', b)$.
- (e) Mostrare che $p_A^{-1}(I) \cap p_B^{-1}(J) \subseteq H$.
- (f) Dedurre che $H \subseteq A \times B$ è un ideale se e solo se esistono ideali $I \subseteq A$ e $J \subseteq B$ tali che $H = I \times J$.

13. In \mathbb{Z} si considerino i numeri non negativi n e m .

- (a) Verificare che $(n) + (m) = \text{MCD}(n, m)\mathbb{Z}$.
- (b) Verificare che $(n) \cap (m) = \text{mcm}(n, m)\mathbb{Z}$.

N.B. Ricordate che in generale il metodo per risolvere un esercizio non è unico. Se qualche cosa non vi è chiara, e/o se pensate di aver trovato un errore di stampa, fatemi sapere!