Istituzioni di Algebra e Geometria — Algebra, a.a. 2023-2024

Esercizi, foglio 4

1. Siano dati due gruppi ciclici G e H con generatori g e h rispettivamente. Si indichi con $\mathrm{Hom}(G, H)$ l'insieme degli omomorfismi da G in H.
   (a) Stabilire se $\mathrm{Hom}(G, H)$ è un sottogruppo di H^G.
   (b) Descrivere ogni $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, H)$ calcolando $\mathrm{Ker}(\varphi)$ e $\mathrm{Im}(\varphi)$.
   (c) Caratterizzare, quando esistono, gli isomorfismi in $\mathrm{Hom}(G, H)$.

2. Siano G e H gruppi e $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, H)$.
   (a) Dimostrare che se φ è iniettivo e H è ciclico, allora anche G lo è.
   (b) Dimostrare che se φ è suriettivo e G è ciclico, allora anche H lo è.

3. Sia D il sottoinsieme delle matrici diagonali in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Dimostrare che D è un sottogruppo, isomorfo al gruppo moltiplicativo $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.
   (b) Per ogni $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, sia φ_P il coniugio rispetto a P; per quali P vale che $\varphi_P(D) \nsubseteq D$?

4. In S_n si consideri la permutazione $\sigma = (1\,2\,3\,\ldots\,n-1\,n)$. Sia

$$\tau = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \ldots & 3 & 2 \end{pmatrix} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

   (a) Dimostrare che $\mathrm{ord}(\sigma) = n$ e $\mathrm{ord}(\tau) = 2$.
   (b) Verificare che $\sigma\tau\sigma = \tau$ e dedurne che $\tau\sigma = \sigma^{n-1}\tau$.
   (c) Mostrare che $<\sigma, \tau>$ è un sottogruppo di S_n, isomorfo al gruppo Δ_n.

5. Si consideri il gruppo diedrale Δ_n e siano $R, D_i \in \Delta_n$ la rotazione di $2\pi/n$ radianti in senso antiorario e la riflessione rispetto all'asse di simmetria per il vertice P_i rispettivamente. Calcolare l'ordine di ogni elemento di Δ_7, Δ_8 e Δ_9.

6. Siano G e H gruppi e $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, H)$ un omomorfismo.
   (a) Dimostrare che se $g \in G$ allora $\mathrm{ord}(\varphi(g)) \mid \mathrm{ord}(g)$.
   (b) Dimostrare che se φ è iniettivo, allora $\mathrm{ord}(\varphi(g)) = \mathrm{ord}(g)$

7. Calcolare gli ordini di tutti gli elementi di Δ_6, A_4, Δ_{12}, S_4 e verificare che $\Delta_6 \not\cong A_4$ e $\Delta_{12} \not\cong S_4$.

8. Si consideri il gruppo diedrale Δ_6, $R \in \Delta_6$ la rotazione di $\pi/3$ radianti in senso antiorario e D_i la riflessione rispetto all'asse di simmetria passante per il vertice P_i dell'esagono.
   (a) Determinare tutte le classi laterali destre di Δ_6 rispetto a $<D_i>$ e rispetto a $<R^2>$.
   (b) Determinare tutte le classi laterali sinistre di Δ_6 rispetto a $<D_i>$ e rispetto a $<R^2>$.
   (c) Determinare un elemento $g \in \Delta_6$ tale che $g <D_i> \neq <D_i> g$.
   (d) Verificare che per ogni elemento $g \in \Delta_6$ risulta $g <R^2> = <R^2> g$: è vero o falso che $<R^2>$ è normale in Δ_6?

9. Sia G un gruppo. Dimostrare che l'applicazione
$$\begin{aligned} \varphi \colon G &\to G \\ g &\mapsto g^2 \end{aligned}$$
   è un omomorfismo se e solo se G è abeliano. Nel caso in cui G sia abeliano, stabilire se φ è un automorfismo.

10. Sia G un gruppo abeliano d'ordine n e sia m coprimo con n. Dimostrare che l'applicazione $\varphi \colon G \to G$ tale che $g \mapsto g^m$ è un automorfismo.

11. Siano G e H gruppi finiti aventi ordini primi fra loro. Dimostrare che $\mathrm{Hom}(G, H)$ contiene solo un elemento, descrivendolo.

12. Siano L e U i sottogruppi di $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ rispettivamente delle matrici triangolari inferiori e superiori. Dimostrare che L e U non sono sottogruppi normali di $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

13. Dimostrare che $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ è sottogruppo normale di $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

14. Sia G un gruppo e sia $H = <g^2 \mid g \in G>$. Dimostrare che H è sottogruppo normale di G.

15. Sia G un gruppo.
   (a) Dimostrare che se $H \subseteq Z(G)$ è un sottogruppo, allora è normale in G.
   (b) Verificare che se $H \lhd G$ è un sottogruppo normale e $|H| = 2$, allora $H \subseteq Z(G)$.

16. Sia G un gruppo.

    (a) Si consideri il morfismo

    $$\begin{aligned} \psi\colon G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

    e si dimostri che, per ogni $g \in G$ e per ogni sottogruppo $H < G$, risulta $\psi(gH) = Hg^{-1}$.

    (b) Sia $g \in G$ un elemento fissato, e si consideri il morfismo

    $$\begin{aligned} \varphi_g\colon G &\to G \\ x &\mapsto gxg^{-1}. \end{aligned}$$

    Dimostrare che per ogni $g \in G$ e per ogni sottogruppo $H < G$ risulta $\varphi_g(Hg) = gH$.

17. Sia G un gruppo e $H < G$ un sottogruppo. Per ogni $g \in G$ definiamo il *sottogruppo coniugato* rispetto a g come gHg^{-1}.

    (a) Dimostrare che gHg^{-1} è un sottogruppo di G.

    (b) Verificare che se H è normale in G allora $H = gHg^{-1}$.

    (c) Si consideri

    $$Core_G(H) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1} :$$

    verificare che $Core_G(H)$ è sottogruppo normale di G contenuto in H.

    (d) Dimostrare che se N è un sottogruppo normale di G e $N \subseteq H$, allora $N \subseteq Core_G(H)$.

18. Siano G e G' gruppi e $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, G')$ un omomorfismo.

    (a) Dimostrare che se $H' \lhd G'$ è un sottogruppo normale, allora $\varphi^{-1}(H') \lhd G$ è sottogruppo normale.

    (b) Dimostrare che se $H \lhd G$ è un sottogruppo normale e φ è un epimorfismo, allora $\varphi(H) \lhd G'$ è sottogruppo normale.

19. Sia G un gruppo. Si definisce *commutatore* di due elementi $a, b \in G$ l'elemento

    $$[a, b] := aba^{-1}b^{-1}.$$

    Sia $[G, G] =< [a, b] \mid a, b \in G >$ il sottogruppo generato da tutti i commutatori degli elementi di G.

    (a) Dimostrare che $[G, G]$ è un sottogruppo normale.

    (b) Dimostrare che $G/[G, G]$ è abeliano.

    (c) Sia $H \lhd G$ un sottogruppo normale: dimostare che G/H è abeliano se e solo se $[G, G] \subseteq H$.

N.B. Ricordate che in generale il metodo per risolvere un esercizio non è unico. Se qualche cosa non vi è chiara, e/o se pensate di aver trovato un errore di stampa, fatemi sapere!