Istituzioni di Algebra e Geometria — Algebra, a.a. 2023-2024
Esercizi, foglio 3

1. Siano $(G, \star)$ e $(H, *)$ gruppi.
   (a) Verificare che il prodotto cartesiano $G \times H$ dotato dell'operazione
   $$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) := (g_1 \star g_2, h_1 * h_2)$$
   è un gruppo.
   (b) Siano $g \in G$ e $h \in H$ elementi di ordine finito. Verificare che l'ordine di $(g, h) \in G \times H$ è $\mathrm{mcm}(\mathrm{ord}(g), \mathrm{ord}(h))$ (mcm = minimo comune multiplo).

2. Sia G un gruppo e siano H e K sottogruppi di G aventi le seguenti proprietà.
   (a) $H \cap K = \{1_G\}$.
   (b) Per ogni $h \in H$ e $k \in K$ risulta $hk = kh$.
   (c) Per ogni $g \in G$ esistono $h \in H$ e $k \in K$ tali che $g = hk$.

   Dimostrare che l'applicazione $\varphi \colon H \times K \to G$ definita da $(h, k) \mapsto hk$ è un isomorfismo.

3. Siano G e G' gruppi e sia $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, G')$.
   (a) Dimostrare che se H' e K' sono sottogruppi di G' allora
   $$\varphi^{-1}(H' \cap K') = \varphi^{-1}(H') \cap \varphi^{-1}(K'), \qquad \varphi^{-1}(H' \vee K') \supseteq \varphi^{-1}(H') \vee \varphi^{-1}(K').$$
   (b) Dimostrare che se H e K sono sottogruppi di G allora
   $$\varphi(H \cap K) \subseteq \varphi(H) \cap \varphi(K), \qquad \varphi(H \vee K) = \varphi(H) \vee \varphi(K).$$
   (c) Dare esempi in cui le due inclusioni
   $$\varphi(H \cap K) \subseteq \varphi(H) \cap \varphi(K), \qquad \varphi^{-1}(H' \vee K') \supseteq \varphi^{-1}(H') \vee \varphi^{-1}(K')$$
   sono strette.

4. Sia G un gruppo e sia $g \in G$ fissato. Dimostrare che il *coniugio rispetto a g*
   $$\begin{aligned} \varphi_g \colon G &\to G \\ x &\mapsto gxg^{-1} \end{aligned}$$
   è un isomorfismo. Dimostrare che φ_g è l'identità se e solo se $g \in Z(G)$.

5. Sia G un gruppo, $a, b \in G$. Verificare che

$$\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(a^{-1}), \qquad \mathrm{ord}(b^{-1}ab) = \mathrm{ord}(a), \qquad \mathrm{ord}(ab) = \mathrm{ord}(ba).$$

6. Sia G un gruppo abeliano e sia $T(G) \subseteq G$ *l'insieme di torsione di* G, cioè il sottoinsieme degli elementi di ordine finito.
   (a) Verificare che se $a, b \in T(G)$ e $m = \mathrm{mcm}(\mathrm{ord}(a), \mathrm{ord}(b))$ allora $(ab)^m = 1$.
   (b) Dimostrare che per ogni $a, b \in T(G)$ risulta $\mathrm{ord}(ab)|m$: dare un esempio in cui non vale l'uguaglianza.
   (c) Se $a, b \in T(G)$ hanno ordini coprimi allora $\mathrm{ord}(ab) = m$.
   (d) Dimostrare che $T(G)$ è un sottogruppo di G.

7. Sia $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Per ogni $a \in \mathbb{R}^*$ calcolare l'ordine della matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

   È vero o falso che l'insieme di torsione $T(G) \subseteq G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ è un sottogruppo?
   (b) Sia $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Per ogni $a \in \mathbb{R}^*$ calcolare l'ordine della matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & a^n \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

   (c) Stabilire se l'insieme degli elementi di ordine al più 2 di $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ forma un sottogruppo.

8. Nel gruppo simmetrico S_7, calcolare il prodotto $\alpha\beta$, dove

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 3 & 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Decomporre ciascuna delle seguenti permutazioni di S_7 in un prodotto di cicli disgiunti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 3 & 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Nel gruppo simmetrico S_7, calcolare il prodotto

$$\sigma = (3\,7\,2\,5)(1\,3\,4\,6)(2\,3).$$

    Decomporre poi σ in prodotto di cicli disgiunti, determinandone ordine e segno.

11. Elencare tutti gli elementi dei gruppi simmetrici S_2, S_3 e S_4 calcolando per ciascuno di essi l'ordine, il segno e una decomposizione in cicli disgiunti.

   (a) È vero o falso che se σ è un ciclo, allora anche σ^2 è un ciclo?

   (b) Stabilire se $(1\,2\,3\,4)^2$ è un ciclo.

12. Sia $1 < a < b < n$.

   (a) Calcolare $(1\,a)(1\,b)(1\,a)$ in S_n.

   (b) Dimostrare che se $\sigma \in S_n$, allora esistono elementi $a_1, \dots, a_k \in \{1, \dots, n\}$ non necessariamente distinti tali che
$$\sigma = \prod_{i=1}^{k} (1\,a_i).$$

   (c) Esprimere la permutazione $(3\,7\,2\,5)(1\,3\,4\,6)(2\,3)$ in tale forma.

13. Sia $\sigma \in S_n$ un ciclo di lunghezza k.

   (a) Dimostrare che $\operatorname{ord}(\sigma) = k$.

   (b) Stabilire se $\sigma^{-1} = \sigma^{k-1}$.

   (c) Verificare se $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{k-1}$.

14. Sia $\sigma \in S_n$ un ciclo di lunghezza k. È vero o falso che σ^{-1} è un ciclo?

15. Sia $n \geq 3$.

   (a) Sia $\sigma \in S_n$ tale che $\sigma(a) = b \neq a$: dimostrare che se $c \notin \{\ a, b\ \}$ allora $\sigma(b\,c) \neq (b\,c)\sigma$.

   (b) Dimostrare che $Z(S_n) = \{1\}$ per $n \geq 3$.

N.B. Ricordate che in generale il metodo per risolvere un esercizio non è unico. Se qualche cosa non vi è chiara, e/o se pensate di aver trovato un errore di stampa, fatemi sapere!