Istituzioni di Algebra e Geometria — Algebra, a.a. 2023-2024

Esercizi, foglio 2

1. Siano dati i seguenti insiemi G con l'operazione $*$ indicata a fianco. Per ciascuno di essi stabilire se sono chiusi rispetto all'operazione e determinare quali degli assiomi di gruppo abeliano valgono per essi.

   (a) $G = \mathbb{N}$, $a * b = a^b$.

   (b) $G = \mathbb{R}$, $a * b = a + b + 3$.

   (c) $G = (1, +\infty)$, $a * b = a^{\log b}$.

   (d) $G = \mathbb{N}$, $a * b = \max\{a, b\}$.

2. Sia G un gruppo e sia $\{H_i\}_{i \in I}$ una qualsiasi famiglia di sottogruppi di G. Dimostrare che l'intersezione $H = \bigcap_{i \in I} H_i \subseteq G$ è ancora un sottogruppo di G.

3. Sia G un gruppo e siano H e K sottogruppi di G.

   (a) Verificare che $H \cup K$ è un sottogruppo se e solo se o $H \subseteq K$ o $K \subseteq H$.

   (b) Dimostrare che $H \vee K = \langle\ H \cup K\ \rangle$.

   (c) Dimostrare che se $G = H \cup K$ e H è proprio, allora $G = K$.

4. Sia G un gruppo moltiplicativo, X un insieme. Se $\varphi, \psi \in G^X$ si definisca

$$\begin{aligned} \varphi\psi \colon X &\longrightarrow G \\ a &\longrightarrow \varphi(a)\psi(a). \end{aligned}$$

   Verificare che G^X con tale operazione è un gruppo.

   Verificare che G^X è abeliano se e solo se G è abeliano.

5. Sia $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ il gruppo moltiplicativo delle matrici invertibili d'ordine n a coefficienti in $\mathbb{R}$. Stabilire quale dei seguenti insiemi ne è un sottogruppo.

   (a) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$.

   (b) $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^t A = I_n\}$.

   (c) $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^t A = I_n,\ \det(A) > 0\}$.

   (d) $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) < 0\}$.

   (e) $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\}$.

(f) $\mathrm{SL}_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \geq 1\}$.

(g) $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A = {}^tA\}$.

6. Dare un esempio di gruppo G e di due suoi elementi $a, b \in G$ tali che le equazioni

$$ax = b, \qquad xa = b$$

abbiano soluzioni distinte.

7. Sia G un gruppo.

   (a) Dimostrare che se $a^2 = 1$ per ogni $a \in G$, allora G è abeliano.

   (b) Dimostrare che se $a^{-1}b^{-1} = (ab)^{-1}$ per ogni $a, b \in G$, allora G è abeliano.

   (c) Dimostrare che se $a^2b^2 = (ab)^2$ per ogni $a, b \in G$, allora G è abeliano.

8. Sia G un gruppo. Se $a, b \in G$ il *commutatore di a e b* è $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$. Dimostrare che $ab = ba$ se e solo se $[a, b] = 1$.

9. Sia G un gruppo. Il *centro di G* è l'insieme

$$Z(G) = \{x \in G \mid gx = xg \ \forall g \in G\}.$$

   (a) Dimostrare che $Z(G)$ è un sottogruppo.

   (b) Verificare che $Z(G) = G$ se e solo se G è abeliano.

   (c) Determinare $Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$.

10. Sia G un gruppo. In G definiamo la relazione di *coniugio* come segue: $a \sim b$ se e solo se esiste $g \in G$ tale che $gag^{-1} = b$.

   (a) Dimostrare che la relazione di coniugio è una relazione d'equivalenza in G.

   (b) Verificare che la relazione di coniugio coincide con la relazione d'uguaglianza se e solo se G è abeliano

11. Siano date le seguenti applicazioni. Per ciascuna di esse stabilire se si tratta di applicazione iniettiva o suriettiva. Determinare poi se si tratta di omomorfismo rispetto alle operazioni indicate.

   (a) $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $x \mapsto e^x$.

   (b) $(\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$, $x \mapsto \log|x|$.

   (c) $(\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}, +)$, $z \mapsto \overline{z}$.

(d) $(\mathbb{C}^*, \cdot) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $z \mapsto \overline{z}$.

(e) $(\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{R}, +)$, $z \mapsto |z|^3$.

(f) $(\mathbb{C}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $z \mapsto |z|^3$.

(g) $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $A \mapsto \det(A)$.

(h) $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$, $A \mapsto \mathrm{tr}(A)$.

(i) $(\mathbb{C}^*, \cdot) \to (\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$, $a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

12. Siano date le seguenti corrispondenze. Per ciascuna di esse stabilire se si tratta di applicazione ben definita e, in tal caso, determinarne iniettività e suriettività . Stabilire poi se si tratta di omomorfismo rispetto alle operazioni indicate.

(a) $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_5, +)$, $n \mapsto n \pmod 5$.

(b) $(\mathbb{Z}^*, \cdot) \to (\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$, $n \mapsto n \pmod 5$.

(c) $(\mathbb{Z}_{10}, +) \to (\mathbb{Z}_5, +)$, $n \pmod{10} \mapsto n \pmod 5$.

(d) $(\mathbb{Z}_{10}^*, \cdot) \to (\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$, $n \pmod{10} \mapsto n \pmod 5$.

(e) $(\mathbb{Z}_4, +) \to (\mathbb{Z}_5, +)$, $n \pmod 4 \mapsto n \pmod 5$.

(f) $(\mathbb{Z}_4, +) \to (\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$, $n \pmod 4 \mapsto n \pmod 5$.

(g) $(\mathbb{Z}_{10}, +) \to (\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2, +)$, $n \pmod{10} \mapsto (n \pmod 5, n \pmod 2)$.

13. Sia G un gruppo. Dimostrare che l'insieme $\mathrm{Aut}(G)$ degli automorfismi di G con l'operazione di composizione è un gruppo.

14. Siano G e H gruppi e siano dati $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(G, H)$. Stabilire se

$$K := \{g \in G \mid \varphi(g) = \psi(g)\}$$

è un sottogruppo di G.

15. Sia G un gruppo. Dimostrare che

$$\begin{aligned} \varphi\colon G &\longrightarrow G \\ g &\longrightarrow g^{-1} \end{aligned}$$

è un omomorfismo se e solo se G è abeliano. Nel caso in cui G sia abeliano, stabilire se φ è un automorfismo.

N.B. Ricordate che in generale il metodo per risolvere un esercizio non è unico. Se qualche cosa non vi è chiara, e/o se pensate di aver trovato un errore di stampa, fatemi sapere!