Istituzioni di Algebra e Geometria — Algebra, a.a. 2023-2024

Esercizi, foglio 1

1. Siano $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}\right\}$. Stabilire quali fra le seguenti corrispondenze in $A \times B$ è un'applicazione con dominio A e codominio B:
   (a) $X = \left\{\left(2, \frac{1}{2}\right), \left(1, \frac{3}{4}\right), \left(0, \frac{3}{4}\right), \left(3, \frac{6}{7}\right), \left(5, \frac{3}{4}\right), \left(4, \frac{3}{4}\right)\right\}$,
   (b) $Y = \left\{\left(2, \frac{1}{2}\right), \left(1, \frac{3}{4}\right), \left(0, \frac{3}{4}\right), \left(3, \frac{6}{7}\right), \left(5, \frac{3}{4}\right), \left(2, \frac{3}{4}\right), \left(4, \frac{3}{4}\right)\right\}$,
   (c) $Z = \left\{\left(2, \frac{1}{2}\right), \left(1, \frac{3}{4}\right), \left(0, \frac{3}{4}\right), \left(3, \frac{6}{7}\right), \left(5, \frac{3}{4}\right)\right\}$.

2. Stabilire quali fra le seguenti corrispondenze in $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ è un'applicazione con dominio $[0, +\infty)$ e codominio $\mathbb{R}$:
   (a) $X = \{(x, y) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R} \mid x^2 = y\}$,
   (b) $Y = \{(x, y) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R} \mid x = y^2\}$,
   (c) $Z = \{(x, y) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

3. Siano X, Y, Z insiemi e siano $\varphi, \varphi' \colon X \to Y$ e $\psi, \psi' \colon Y \to Z$ quattro applicazioni.
   (a) Verificare che se φ e ψ sono iniettive, anche $\psi \circ \varphi$ lo è.
   (b) Verificare che se φ e ψ sono suriettive, anche $\psi \circ \varphi$ lo è.
   (c) Verificare che se ψ è biettiva, $\psi \circ \varphi$ è iniettiva se e solo φ lo è.
   (d) Verificare che se φ è biettiva, $\psi \circ \varphi$ è suriettiva se e solo ψ lo è.
   (e) Verificare che se ψ è iniettiva e $\psi \circ \varphi = \psi \circ \varphi'$, allora $\varphi = \varphi'$.
   (f) Verificare che se φ è suriettiva e $\psi \circ \varphi = \psi' \circ \varphi$, allora $\psi = \psi'$.

4. Sia data $\varphi \colon X \to Y$ avente un'*inversa destra* $\psi \colon Y \to X$, cioè $\varphi \circ \psi$ è l'identità su Y.
   (a) Siano $x_1, x_2 \in X$ tali che $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \overline{y}$. Verificare che le applicazioni $\psi_i \colon Y \to X$ definite da
   $$y \mapsto \begin{cases} \psi(y) & \text{se} \quad y \neq \overline{y} \\ x_i & \text{se} \quad y = \overline{y} \end{cases}$$
   sono inverse destre di φ.
   (b) Dedurre che se φ ha un'unica inversa destra, allora φ è iniettiva.

5. Sia data $\varphi\colon X \to Y$ avente un'*inversa sinistra* $\psi\colon Y \to X$, cioè $\psi \circ \varphi$ è l'identità su X.

   (a) Siano $\overline{y} \notin \mathrm{Im}(\varphi)$ e si scelgano $x_1, x_2 \in X$. Verificare che le applicazioni $\psi_i\colon Y \to X$ definite da
   $$y \mapsto \begin{cases} \psi(y) & \text{se} \quad y \neq \overline{y}, \\ x_i & \text{se} \quad y = \overline{y}, \end{cases}$$
   sono inverse sinistre di φ.

   (b) Dedurre che se φ ha un'unica inversa sinistra, allora φ è suriettiva.

6. (a) Dimostrare per induzione su $n \geq 1$ che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$
   $$(a+b)^n = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} a^h b^{n-h}.$$

   (b) Dimostrare per induzione su $n \geq 1$ che per ogni $a \in [-1, +\infty)$
   $$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

   (c) Dimostrare per induzione su $n \geq 0$ che per ogni $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$
   $$\prod_{h=0}^{n} (1 + a^{2^h}) = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1-a}.$$

   (d) Dimostrare per induzione su $n \geq 1$ che
   $$\sum_{h=1}^{n} h^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

7. Stabilire se le seguenti relazioni sono riflessive, simmetriche, antisimmetriche, transitive.

   (a) In $\mathbb{Z}$ poniamo $a \sim b$ se e solo se $a - b$ è pari.

   (b) In $\mathbb{Z}$ poniamo $a \sim b$ se e solo se $a - b$ è dispari.

   (c) In $\mathbb{Z}$ poniamo $a \sim b$ se e solo se esiste $q \in \mathbb{N}$ tale che $a = qb$.

   (d) In $\mathbb{Z}$ poniamo $a \sim b$ se e solo se esiste $q \in \mathbb{Z}$ tale che $a = qb$.

   (e) Siano X e Y insiemi non vuoti e sia $\varphi \in Y^X$: in X poniamo
   $x \sim x'$ se e solo se $\varphi(x) = \varphi(x')$.

   (f) Nell'insieme L delle rette nel piano poniamo $\ell \sim \ell'$ se e solo se ℓ è parallela a ℓ'.

   (g) Nell'insieme L delle rette nel piano poniamo $\ell \sim \ell'$ se e solo se ℓ è perpendicolare a ℓ'.

(h) In $\mathbb{R}^{n,n}$ poniamo $A \sim B$ se esiste $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertibile tale che $A = P^{-1}BP$.

(i) Sia $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici di $\mathbb{R}^{n,n}$ simmetriche:
in $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ poniamo $A \sim B$ se esiste $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertibile tale che $A = {}^tPBP$.

(j) Sia $\mathrm{FinVec}(\mathbb{R})$ l'insieme degli spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ finitamente generati:
in $\mathrm{FinVec}(\mathbb{R})$ poniamo $V \sim W$ se e solo se $\dim(V) = \dim(W)$.

8. Dimostrare che le seguenti relazioni $\leq$ sono d'ordine, distinguendo quelle di ordine parziale da quelle di ordine totale.

   (a) In $\mathbb{N}$ si consideri la relazione $x \leq y$ se e solo se x è multiplo di y.

   (b) Dato un insieme A, in $\mathcal{P}(A)$ si consideri la relazione $X \leq Y$ se e solo se $X \subseteq Y$.

   (c) Dato un insieme A, in $\mathcal{P}(A)$ si consideri la relazione $X \leq Y$ se e solo se $X \supseteq Y$.

   (d) Sia A l'insieme ordinato delle lettere dell'alfabeto latino: in $A^{\mathbb{N}}$ si consideri la relazione $\varphi \leq \psi$ se e solo se o $\varphi = \psi$, o $\varphi(n) \leq \psi(n)$, ove n è il più piccolo $n \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi(n) \neq \psi(n)$.

9. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si consideri l'insieme $I_n = \{\ 1, 2, \ldots, n-1, n\ \}$.

   (a) Osservare che se $n \leq m$ allora $I_n \subseteq I_m$.

   (b) Dimostrare che per ogni $i \in I_n$ l'applicazione $\tau_i \colon I_{n+1} \to I_{n+1}$ tale che

   $$\tau_i(i) = n+1, \qquad \tau_i(n+1) = i, \qquad \tau_i(j) = j,\ \forall j \neq i, n+1,$$

   è biunivoca.

   (c) Verificare che se $A \subseteq I_n \subseteq I_{n+1}$ è non vuoto, allora esiste $i \in I_n$ tale che $B = \tau_i(A)$ contiene $n+1$.

10. Ricordiamo che per definizione ogni insieme equipotente a $\mathbb{N}$ si dice *numerabile*. Verificare che i seguenti insiemi sono numerabili costruendo esplicitamente un'applicazione biunivoca con dominio $\mathbb{N}$.

    (a) $q\mathbb{Z} = \{qx \mid x \in \mathbb{Z}\}$ se $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

    (b) $X \times Y$, ove X e Y sono numerabili e $\varphi \colon \mathbb{N} \to X$ e $\psi \colon \mathbb{N} \to Y$ sono biezioni.

    (c) $X \cup I_2$, ove X è un insieme numerabile e $\varphi \colon \mathbb{N} \to X$ è una biezione.

11. Sia A un insieme e sia $A \subseteq B$.

    (a) Sia $A' \subseteq A$ e $\varphi\colon A \to A'$. Definiamo

    $$\begin{aligned} \psi\colon B &\longrightarrow B' = A' \cup (B \setminus A) \\ b &\longrightarrow \begin{cases} \varphi(b) & \text{se } b \in A, \\ b & \text{se } b \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

    è vero o falso che ψ è iniettiva se e solo se φ è iniettiva?

    (b) Dedurre che se A è infinito, allora B è infinito.

    (c) Dimostrare che A è infinito se e solo se contiene un sottoinsieme numerabile.

12. Siano A e B insiemi. Dimostrare che $A \times B$ e $B \times A$ sono equipotenti costruendo un'applicazione biunivoca fra di loro.

13. Un insieme si dice *al più numerabile* se è o numerabile, o finito. Dimostrare che se $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una famiglia al più numerabile di insiemi non vuoti e al più numerabili, allora $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ è al più numerabile.

14. Si consideri l'insieme dei polinomi $\mathbb{Q}[x]$ a coefficienti in $\mathbb{Q}$: se $p(x) \in \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}$ si indichi con $\deg(p)$ il suo grado.

    (a) Per ogni $m \in \mathbb{N}$ sia $\mathbb{Q}[x]_m$ l'insieme dei polinomi $p(x)$ di grado esattamente m: dimostrare che $\mathbb{Q}[x]_m$ è numerabile.

    (b) Verificare che $\mathbb{Q}[x] = \{0\} \cup \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}[x]_m$: verificare che $\mathbb{Q}[x]$ è numerabile.

    (c) Dedurre che l'insieme $\mathbb{Z}[x]$ dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{Z}$ è numerabile.

    (d) È vero o falso che l'insieme $\mathbb{C}[x]$ dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{C}$ è numerabile?

N.B. Ricordate che in generale il metodo per risolvere un esercizio non è unico. Se qualche cosa non vi è chiara, e/o se pensate di aver trovato un errore di stampa, fatemi sapere!