Lezione 4.
Insiemi Finiti e Infiniti

In questa lezione vogliamo studiare gli insiemi in funzione del loro numero di elementi. Nel contesto della teoria assiomatica degli insiemi è possibile dare un significato preciso a tale nozione anche per insiemi che non hanno un numero finito di elementi. In tal caso si deve parlare di *cardinalità* e di *numeri cardinali transfiniti*.

Noi ci limiteremo a qualche risultato elementare, giusto per inquadrare il problema almeno in maniera intuitiva.

Definizione 4.10. Sia X un insieme. X si dice finito se o $X = \emptyset$ oppure esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $X \approx I_n$. X si dice infinito se non è finito.

Osservazione 4.7. *Ogni sottoinsieme di un insieme finito è finito. Ogni insieme equipotente a un insieme infinito è infinito.*

Se X contiene un insieme infinito Y, allora X è infinito. Infatti, in caso contrario, esisterebbe $n \in \mathbb{N}$ tale che $X \approx I_n$. Quindi esisterebbe un'applicazione iniettiva $\varphi\colon Y \to I_n$. È molto facile verificare che questo implica l'esistenza di $m \leq n$ tale che $Y \approx I_m$, in contraddizione con l'ipotesi che Y sia infinito.

È importante trovare un criterio pratico per stabilire se un insieme è infinito o meno. Iniziamo a dimostrare il seguente enunciato che dipende fortemente dall'Assioma della scelta.

Proposizione 4.7. *Sia X un insieme. Se X è infinito esiste un'applicazione $\varphi\colon \mathbb{N} \to X$ iniettiva.*

Dimostrazione. Si consideri

$$\mathfrak{Y} = \{\ Y\ \}_{Y \in \mathscr{P}(X) \setminus \{\ \emptyset\ \}}$$

e sia f una funzione di scelta per $\mathfrak{Y}$. Poniamo

$$\begin{gathered} a_1 = f(X), \\ a_2 = f(X \setminus \{\ a_1\ \}), \\ a_3 = f(X \setminus \{\ a_1, a_2\ \}), \\ a_4 = f(X \setminus \{\ a_1, a_2, a_3\ \}), \\ \vdots \\ a_n = f(X \setminus \{\ a_1, \dots, a_{n-1}\ \}), \\ \vdots \end{gathered}$$

Allora l'applicazione $\varphi\colon \mathbb{N} \to X$ definita da $n \mapsto a_n$ è iniettiva per costruzione. □

Siamo ora in grado di dare un criterio per stabilire se un insieme è infinito: tale criterio fa uso della proposizione precedente, quindi dipende dall'Assioma della scelta.

Proposizione 4.8 (Criterio di Dedekind)**.** *Sia X un insieme. X è infinito se e solo se $X \approx Y$ per qualche sottoinsieme proprio $Y \subset X$.*

Dimostrazione. Supponiamo che Y esista e dimostriamo che X è infinito, cioè che non è finito. Se lo fosse, diciamo $X \approx I_n$, esisterebbe un'applicazione iniettiva e non suriettiva $\varphi\colon Y \to I_n$ per un qualche n, dunque esisterebbe $m < n$ tale che $Y \approx I_m$. Allora

$$I_n \approx X \approx Y \approx I_m,$$

in contraddizione con quanto visto nell'esempio 3.13. Concludiamo che X è necessariamente infinito.

Viceversa supponiamo che X sia infinito. Sappiamo che esiste un'applicazione iniettiva $\varphi\colon \mathbb{N} \to X$ per la proposizione 4.7: sia $Z = \operatorname{im}(\varphi)$ e poniamo $Z' = Z \setminus \{ \varphi(1) \} \neq Z$.

Si noti che

$$\varphi'\colon \mathbb{N} \to Z,$$
$$\varphi''\colon \mathbb{N} \setminus \{ 1 \} \to Z',$$

definite da $n \mapsto \varphi(n)$ sono entrambe biiezioni per definizione.

Sia poi $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{ 1 \}$ definita da $n \mapsto n+1$: si vede facilmente che σ è biiettiva.

Concludiamo che $\psi = \varphi'' \circ \sigma \circ \varphi'^{-1}\colon Z \to Z'$ è una biiezione. Posto

$$Y := X \setminus \{ \varphi(1) \} = (X \setminus Z) \cup Z' \neq X,$$

l'applicazione

$$\begin{aligned} \vartheta\colon X &\longrightarrow Y \\ x &\longrightarrow \begin{cases} x & \text{se } x \in X \setminus Z, \\ \psi(x) & \text{se } x \in Z \end{cases} \end{aligned}$$

è una biiezione. In particolare $X \approx Y \neq X$. □

Esempio 4.18. L'applicazione $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{ 1 \} \neq \mathbb{N}$ definita da $n \mapsto n+1$ è una biiezione, quindi $\mathbb{N}$ è infinito.

Poiché $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ contengono tutti $\mathbb{N}$, deduciamo dall'osservazione 4.8 che essi sono tutti insiemi infiniti. Anche altri insiemi contengono copie di $\mathbb{N}$: per esempio $\{ b+n \mid n \in \mathbb{N} \} \subseteq]b, +\infty[\subseteq [b, \infty[$. Un discorso simile si può fare per $]-\infty, a[\subseteq]-\infty, a]$. Dunque $]-\infty, a[$, $]-\infty, a]$, $]b, +\infty[$ e $[b, +\infty[$ sono infiniti.

Abbiamo già visto la nozione di equipotenza o equicardinalità fra insiemi.

Esempio 4.19. Se $a < b$ e $c < d$ allora $]a, b[\approx]c, d[$. Per esempio si può considerare una funzione di tipo affine il cui grafico passi per i punti (a, c) e (b, d), cioè

$$x \mapsto (d - c)\frac{x - a}{b - a} + c$$

con $x \in]a, b[$.

D'altra parte la tangente trigonometrica $\tan\colon] - \pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ è una biiezione.

Infine si noti che l'applicazione $x \mapsto a - e^x$ induce una biiezione $] - \infty, a[\approx \mathbb{R}$. Si verifica in maniera simile che vale anche $]b, \infty[\approx \mathbb{R}$.

Esempio 4.20. Lo stesso trucco utilizzato nella dimostrazione della proposizione 4.8 permette di dimostrare che se X è infinito e $I \subseteq \mathbb{N}$, allora $X \cup I \approx X$.

Per esempio supponiamo per semplicità che $X \cap I = \emptyset$ e sia $\varphi\colon \mathbb{N} \to X$ un'applicazione iniettiva con $Z = \operatorname{im}(\varphi)$. Se $I = \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots \}$ consideriamo la tabella

$$\begin{array}{ccccccccc}
\varphi(1) & & \varphi(2) & & \dots & & \varphi(n) & & \dots \\
\downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\
\lambda_1 & & \lambda_2 & & \dots & & \lambda_n & & \dots
\end{array}$$

e definiamo $\psi\colon Z \to Z \cup I$ seguendo le frecce.

Allora l'applicazione

$$\begin{aligned}
\vartheta\colon X &\longrightarrow X \cup I \\
x &\longrightarrow \begin{cases} x & \text{se } x \in X \setminus Z, \\ \psi(x) & \text{se } x \in Z \end{cases}
\end{aligned}$$

è una biiezione. È facile modificare l'argomento precedente per comprendere anche il caso $X \cap I \neq \emptyset$.

Per esempio $\mathbb{N} \approx \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{ 0 \}$, per ogni $a, b \in \mathbb{R} \cup \{ \pm\infty \}$ con $a < b$, risulta

$$[a, b] \approx]a, b] \approx [a, b[\approx]a, b[\approx \mathbb{R}$$

e $[0, 1] \approx [0, 1] \cup \mathbb{Q}$.

Definizione 4.11. Sia X un insieme. X si dice numerabile se $X \approx \mathbb{N}$, al più numerabile se o è finito o è numerabile, più che numerabile (talvolta non numerabile) in tutti gli altri casi.

Nella proposizione 4.7 abbiamo dimostrato che ogni insieme infinito contiene un insieme numerabile: è chiaro che vale anche il viceversa, cioè se un insieme contiene un sottoinsieme numerabile allora è infinito (si veda l'osservazione 4.8).

Si noti che da quanto visto fino a ora, però, non si può escludere a priori che un insieme numerabile possa contenere un insieme più che numerabile. In effetti, come importante applicazione del seguente risultato, dimostreremo che ciò non è possibile.

Teorema 4.1 (Teorema di Cantor–Schröder–Bernstein)**.** *Siano X e Y insiemi. Se esistono applicazioni iniettive $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$ allora $X \approx Y$.*

Dimostrazione. Omessa. □

Corollario 4.1. *Ogni sottoinsieme di un insieme al più numerabile è al più numerabile.*

Dimostrazione. Tenendo conto dell'osservazione 4.8 basta verificare che ogni sottoinsieme infinito di un insieme numerabile è numerabile.

Sia $X \approx \mathbb{N}$ e sia $Y \subseteq X$ infinito. Allora esiste un'applicazione iniettiva $\varphi\colon Y \to \mathbb{N}$: inoltre esiste anche un'applicazione iniettiva $\psi\colon \mathbb{N} \to Y$, perché Y è infinito (si veda la proposizione 4.7). Per il teorema 4.1 deduciamo che $Y \approx \mathbb{N}$. □

Quindi gli insiemi numerabili sono, in un certo senso, gli insiemi infiniti più piccoli. Molti insiemi importanti sono numerabili.

Esempio 4.21. Per definizione $\mathbb{N}$ è numerabile. Per quanto visto nell'esempio 4.20 anche $\mathbb{N}_0$ lo è.

Verifichiamo che $\mathbb{Z}$ è numerabile. Si consideri l'applicazione biiettiva $\varphi\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ definita da

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1, \quad \varphi(2) = -1, \quad \varphi(3) = 2, \quad \varphi(4) = -2, \quad \varphi(5) = 3, \quad \dots$$

cioè

$$\varphi(n) = \left[\frac{n+1}{2}\right] (-1)^{n+1-2\left[\frac{n+1}{2}\right]}.$$

Verifichiamo che $\mathbb{Q}$ è numerabile. Si consideri la tabella infinita

$$\begin{array}{cccccccccc}
\frac{1}{1} & & \frac{2}{1} & \rightarrow & \frac{3}{1} & & \frac{4}{1} & \rightarrow & \frac{5}{1} & \dots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
\frac{1}{2} & & \cancel{\frac{2}{2}} & & \frac{3}{2} & & \cancel{\frac{4}{2}} & & \frac{5}{2} & \dots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \cancel{\frac{3}{3}} & & \frac{4}{3} & & \frac{5}{3} & \dots \\
\downarrow & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
\frac{1}{4} & & \cancel{\frac{2}{4}} & & \frac{3}{4} & & \cancel{\frac{4}{4}} & & \frac{5}{4} & \dots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
\frac{1}{5} & & \frac{2}{5} & & \frac{3}{5} & & \frac{4}{5} & & \cancel{\frac{5}{5}} & \dots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Percorrendola seguendo le frecce come indicato e saltando le frazioni improprie, si ottiene una biiezione

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}_+ = \{\ x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\ \}.$$

È allora facile allora costruire un'applicazione biiettiva $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, dunque $\mathbb{Q} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$.

Essenzialmente con lo stesso metodo si può dimostrare che l'unione di una famiglia numerabile di insiemi numerabili è numerabile.

Non tutti gli insiemi infiniti sono numerabili.

Proposizione 4.9. $\mathbb{R}$ *è più che numerabile.*

Dimostrazione. Per quanto visto nell'esempio 4.20 è sufficiente verificare che $[0,1[$ è più che numerabile. Osserviamo che ogni numero x in questo intervallo ha una rappresentazione decimale. Tale rappresentazione è unica a meno che il numero x sia decimale finito. In questo caso, se

$$x = 0, x^1 x^2 \dots x^{n-1} x^n$$

allora vale anche

$$x = 0, x^1 x^2 \dots x^{n-1}(x^n - 1)\overline{9} \dots$$

(si veda l'osservazione 4.8 dopo la dimostrazione). In caso di ambiguità scegliamo per ogni $x \in [0,1[$ una rappresentazione che non sia periodica di periodo 9.

Sia $\varphi \colon \mathbb{N} \to [0,1[$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$\varphi(n) = x = 0, x_n^1 x_n^2 \dots, x_n^{n-1} x_n^n \dots \ .$$

Definiamo $y = 0, y^1 y^2 \dots, y^{n-1} y^n \dots$ come segue:

$$y^n = \begin{cases} 2 & \text{se } x_n^n \neq 2, \\ 3 & \text{se } x_n^n = 2. \end{cases}$$

Allora y differisce da $\varphi(n)$ per la n–esima cifra decimale, quindi $y \notin \operatorname{im}(\varphi)$. In particolare $[0,1[\not\approx \mathbb{N}$: poiché $[0,1[$ è infinito, segue subito che deve essere più che numerabile. □

Osservazione 4.8. *Per illustrare brevemente il problema della non unicità della rappresentazione per i numeri decimali ricordiamo che come si converte un numero decimale x in frazione.*

Se x ha forma decimale i, ap ove i è la sua parte intera, a sono le cifre dell'antiperiodo e p il complesso (finito) di cifre del periodo, indichiamo con α e π il numero di cifre dell'antiperiodo e del periodo rispettivamente. Si ha allora che

$$(10^{\alpha+\pi} - 10^{\alpha})x = iap - ia$$

da cui segue

$$x = \frac{iap - ia}{10^{\alpha}(10^{\pi} - 1)}.$$

Per esempio si ha

$$0,12 = 0,11\overline{9}.$$

Infatti

$$11\overline{9} = \frac{119 - 11}{90} = \frac{108}{90} = \frac{12}{10} = 1,2.$$

Un problema interessante è quello di capire se esistono insiemi $X \subseteq \mathbb{R}$ più che numerabili ma non equipotenti a $\mathbb{R}$. La cosiddetta *Ipotesi del continuo* afferma che un tale insieme non può esistere. È stato dimostrato che nell'ambito della teoria insiemistica basata sull'assiomatica di Zermelo–Fränkel il problema dell'esistenza di tali insiemi intermedi è indecidibile.

In ogni caso è sempre possibile costruire insiemi più grandi di uno dato. Un buon candidato è l'insieme delle parti. Infatti se X è un insieme, esiste sempre un'applicazione iniettiva ovvia $X \to \mathscr{P}(X)$. Il seguente risultato ci permette d'affermare che questa è una buona scelta.

Proposizione 4.10. *Sia X un insieme. Allora $X \not\approx \mathscr{P}(X)$.*

Dimostrazione. Si consideri un'applicazione $\varphi\colon X \to \mathscr{P}(X)$. Definiamo

$$Y = \{\ x \in X \mid x \notin \varphi(x)\ \} \in \mathscr{P}(X).$$

Se φ fosse suriettiva esisterebbe $y \in X$ tale che $Y = \varphi(y)$.

Se fosse $y \in Y$, allora, per definizione, $y \notin \varphi(y) = Y$, una contraddizione. Se fosse $y \notin Y$, allora, per definizione, $y \in \varphi(y) = Y$, un'altra contraddizione. Deduciamo che φ non può essere suriettiva: in particolare non esistono applicazioni biiettive da X in $\mathscr{P}(X)$. □

Per esempio $\mathbb{N} \not\approx \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Si può dimostrare che $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \approx \mathbb{R}$.