

Lezione 1.

Corrispondenze e Applicazioni

Nel corso di queste prime lezioni tratteremo alcuni argomenti riguardanti la teoria degli insiemi. Assumeremo come note molte nozioni di base già viste in anni precedenti come le seguenti.

- La nozione di insieme, di elemento di un insieme, di appartenenza e non appartenenza di un elemento a un insieme.
- Le relazioni di inclusione e inclusione stretta fra insiemi.
- Le operazioni di intersezione, unione, differenza fra insiemi.
- Le nozioni di insieme vuoto, prodotto cartesiano di insiemi e di insieme delle parti di un insieme.

In realtà tutte queste nozioni, relazioni e operazioni si possono inquadrare in un contesto assiomatico, cioè in un contesto in cui partendo da un numero finito di assiomi si possono dedurre logicamente tutta una serie enunciati. Un sistema assiomatico per la teoria degli insiemi è stato il risultato degli studi di vari matematici del secolo scorso.

Il sistema di assiomi accettato è quello che va sotto di *sistema di assiomi di Zermelo–Fränkel*. Non discuteremo di tale sistema di assiomi, ma lo utilizzeremo implicitamente, facendo talvolta qualche osservazione su di esso a carattere più storico e culturale che di sostanza.

Definizione 1.1. Siano X e Y insiemi. Una corrispondenza F di dominio X e codominio Y è un sottoinsieme di $X \times Y$.

Se $(x, y) \in F$ si dice che x è in corrispondenza con y tramite F e si scrive spesso $x F y$.

Esempio 1.1. Gli insiemi \emptyset e $X \times Y$ sono corrispondenze da X a Y dette banali.

Esempio 1.2. Siano

$$X = \{ 0, 1, 2 \}, \quad Y = \{ a, b, c, d \}.$$

Allora

$$F = \{ (0, a), (0, b), (2, c), (0, d) \} \subseteq X \times Y,$$
$$G = \{ (a, 0), (b, 0), (c, 2), (d, 0) \} \subseteq Y \times X$$

sono corrispondenze rispettivamente da X in Y e da Y in X . Si noti che $F \neq G$.

Chiaramente 0 è in corrispondenza sia con a che con b e c tramite F .

Esempio 1.3. Sia

$$X = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 1 \} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2.$$

Allora X è una corrispondenza da \mathbb{R} a \mathbb{R} . Si noti che 1 è in corrispondenza con il solo 0 ; 0 è in corrispondenza sia con 1 che con -1 ; 2 non è in corrispondenza con nessun elemento del codominio.

Esempio 1.4. Sia

$$X = \{ (x, y) \mid x = y^2 \} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2.$$

Allora X è una corrispondenza da \mathbb{R} a \mathbb{R} . Si noti che 0 è in corrispondenza con il solo 0 ; 1 è in corrispondenza sia con 1 che con -1 ; tutti i numeri non negativi sono in corrispondenza con qualche elemento del codominio; nessun numero negativo è in corrispondenza con qualche elemento del codominio.

Definizione 1.2. Siano X e Y insiemi. Una corrispondenza F di dominio X e codominio Y è detta applicazione (o funzione, o mappa) da X a Y se per ogni $x \in X$ esiste un unico $y \in Y$ tale che $x F y$.

Se F è un'applicazione, di solito si scrive $F: X \rightarrow Y$ e $y = F(x)$ invece di $F \subseteq X \times Y$ e $x F y$. Spesso si scrive anche in maniera compatta $x \mapsto F(x)$.

L'insieme di tutte le funzioni da X a Y si indica con Y^X .

Esempio 1.5. La corrispondenza F dell'esempio [1.2](#) non è un'applicazione, mentre lo è G . Le corrispondenze degli esempi [1.3](#) e [1.4](#) non sono funzioni.

Anche nel caso di funzioni diamo per scontate una serie di nozioni di base.

- La definizione di immagine di un'applicazione e di immagine inversa di un elemento del codominio.
- La nozione di applicazione iniettiva, suriettiva, biiettiva.
- L'operazione di composizione \circ di funzioni.
- La definizione di applicazione identità $id_X: X \rightarrow X$.
- La nozione di applicazione inversa e la sua unicità.
- L'equivalenza fra biiettività e invertibilità.
- La definizione di restrizione di una applicazione a un sottoinsieme del dominio e di estensione ad un insieme contenente il dominio.

Proposizione 1.1. Siano X e Y insiemi. Se $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow X$ allora se $g \circ f = id_X$ segue che f è iniettiva e g è suriettiva.

Dimostrazione. Supponiamo che esistano $x', x'' \in X$ tali che $f(x') = f(x'')$. Allora

$$x' = id_X(x') = g \circ f(x') = g \circ f(x'') = id_X(x'') = x'',$$

cioè f è iniettiva.

Sia $x \in X$. Allora

$$x = id_X(x) = g \circ f(x)$$

cioè $x = g(y)$ ove $y = f(x)$, ovvero g è suriettiva. \square

Definizione 1.3. Siano X e Y insiemi. Se $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione $g: Y \rightarrow X$ si dice:

- inversa destra di f se $f \circ g = id_Y$;
- inversa sinistra di f se $g \circ f = id_X$.

Quindi la proposizione [1.1](#) si può anche leggere affermando che se f ha inversa destra allora f è suriettiva, mentre se ha inversa sinistra allora f è iniettiva.

Esempio 1.6. Si consideri $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$. \exp è iniettiva (ma non suriettiva). Sia $u \in \mathbb{R}$ e definiamo

$$g_u: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$y \longrightarrow \begin{cases} \log(y) & \text{se } y > 0, \\ u & \text{se } y \leq 0. \end{cases}$$

Poiché $\exp(x) > 0$ segue che

$$g_u \circ \exp(x) = \log(e^x) = x :$$

in particolare \exp ha infinite inverse sinistre.

La proposizione [1.1](#) può, in un certo senso, essere completata.

Proposizione 1.2. Siano X e Y insiemi e $f: X \rightarrow Y$. f ha inversa sinistra se e solo se è iniettiva.

Dimostrazione. La proposizione [1.1](#) ci permette di affermare che se f ha inversa sinistra, allora f è iniettiva.

Viceversa supponiamo che f sia iniettiva. Allora per ogni $y \in \text{im}(f)$ risulta $f^{-1}(y) = \{x_y\}$: scegliamo $u \in X$ e definiamo

$$g_u: Y \longrightarrow X$$

$$y \longrightarrow \begin{cases} x_y & \text{se } y \in \text{im}(f), \\ u & \text{se } y \notin \text{im}(f). \end{cases}$$

Poiché $f(x) \in \text{im}(f)$ segue che

$$g_u \circ f(x) = g_u(y) = x_y :$$

quindi g_u è inversa sinistra di f . \square

Più delicato è dimostrare l'esistenza di inverse destre per un'applicazione suriettiva $f: X \rightarrow Y$. È facile vedere che per costruire un'inversa destra dobbiamo, per ogni $y \in Y$ scegliere uno e un solo elemento $x_y \in f^{-1}(y)$ e definire g come $y \mapsto x_y$.

Nel caso Y sia un insieme finito è intuitivamente chiaro che un tale insieme di scelte si può fare: ciò non è più molto chiaro se Y non è finito, in assenza di una precisa regola di scelta.

Definizione 1.4. Sia $\mathfrak{X} = \{ X_i \}_{i \in I}$ una famiglia di insiemi non vuoti. Una funzione di scelta per \mathfrak{X} è un'applicazione

$$s: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$$

tale che $f(i) \in X_i$ per ogni $i \in I$.

Enunciamo il seguente *Assioma della scelta*

Assioma 1.1 (Assioma della scelta). *Sia $\mathfrak{X} = \{ X_i \}_{i \in I}$ una famiglia di insiemi non vuoti. Allora esiste una funzione di scelta per \mathfrak{X} .*

Nel caso in cui I sia un insieme di indici finito, l'assioma della scelta è in realtà una proposizione dimostrabile all'interno del sistema di assiomi di Zermelo–Fränkel. Ciò non è più vero se l'insieme di indici I non è finito.

Osservazione 1.1. *L'Assioma della scelta, pur nella sua semplicità, riveste un'importanza centrale nella teoria degli insiemi. In particolare, si può dimostrare che esso è indipendente dal sistema di assiomi di Zermelo–Fränkel nel senso che assumere o non assumere oltre a tale sistema di assiomi, l'assioma della scelta dà origine a teorie assiomatiche non contraddittorie.*

È stupefacente quante dimostrazioni si semplifichino (o si possano anche solo fare) assumendo l'Assioma della scelta: per tale motivo noi lo assumeremo fra gli assiomi fondamentali da adesso in poi.

L'Assioma della scelta è equivalente a molti enunciati interessanti. Per esempio al Teorema di Tychonov che afferma che un qualsiasi prodotto di spazi topologici compatti è compatto.

L'assioma della scelta ha anche delle conseguenze interessanti. La prima è che l'unico esempio noto di insieme non misurabile (qualsiasi cosa questa frase significhi!), cioè il cosiddetto insieme di Vitali, si costruisce utilizzando l'Assioma della scelta.

Un'altro paradosso interessante è il Paradosso di Banach-Tarski che afferma che data una sfera piena di volume 1 nello spazio tridimensionale è possibile suddividerla in un numero finito di parti che si possono ricomporre con rototraslazioni in maniera da ottenere due sfere piene ciascuna di volume 1.

Proposizione 1.3. *Siano X e Y insiemi e $f: X \rightarrow Y$. f ha inversa destra se e solo se è suriettiva.*

Dimostrazione. La proposizione 1.1 ci permette di affermare che se f ha inversa destra, allora f è suriettiva.

Viceversa supponiamo che f sia suriettiva. Si consideri $\mathfrak{X} = \{ f^{-1}(y) \}_{y \in Y}$ e sia g una funzione di scelta per \mathfrak{X} . Si noti che

$$\bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y) \subseteq X,$$

dunque $g: Y \rightarrow X$ e per ogni $y \in Y$ si ha $g(y) \in f^{-1}(y)$. Quindi $f \circ g(y) = f(x)$ ove $x \in f^{-1}(y)$, sicché $f \circ g(y) = y$, ovvero $f \circ g = id_Y$, cioè g_u è inversa destra di f . \square

Si può dimostrare che l'Assioma della scelta è equivalente ad affermare che ogni applicazione suriettiva ha inversa destra.