ISTITUZIONI DI ALGEBRA E GEOMETRIA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA

30/01/2023

Istruzioni.

- Risolvete i 3 esercizi proposti. Ognuno vale 10 punti, per un massimo di 30 punti.
- Scrivete la soluzione degli esercizi in maniera chiara e ordinata e MOTIVANDO OGNI RISPOSTA. Scrivete il vostro nome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.

(1) Siano dati i gruppi $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$ e $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$.

(a) Esiste un isomorfismo dei gruppi additivi G e H?

(b) Elencare gli elementi dei gruppi moltiplicativi G^* e H^*.

(c) Esiste un isomorfismo dei gruppi G^* e $\mathbb{Z}_4$? E dei gruppi G^* e $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$?

(2) Siano A e B anelli commutativi con unità e sia $\phi : A \to B$ un omomorfismo di anelli unitari.

(a) È sempre vero che se $I \subseteq A$ è un ideale, allora $\phi(I) \subseteq B$ è un ideale?

(b) Dimostrare che se $J \subseteq B$ è un ideale primo, allora $\phi^{-1}(J) \subseteq A$ è un ideale primo.

(c) Dedurre da (b) che se $\phi : A \to B$ è un monomorfismo di anelli e B è un dominio di integrità, allora A è anche un dominio di integrità.

(a) È sempre vero che se A e B sono domini di integrità, allora $A \times B$ è un dominio di integrità?

(3) Sia $\alpha = 2 + i\sqrt{5} \in \mathbb{C}$.

(a) Dimostrare che α è algebrico su $\mathbb{Q}$ e trovarne il polinomio minimo $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$.

(b) Spiegare perché $K = \mathbb{Q}[\alpha]$ è un campo, e calcolare la dimensione di K su $\mathbb{Q}$.

(c) Sia β la radice terza di 5 in $\mathbb{R}$. È possibile che $\mathbb{Q}[\beta] \subset K$?

ISTITUZIONI DI ALGEBRA E GEOMETRIA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA

17/02/2023

Istruzioni.

- Risolvete i 3 esercizi proposti. Ognuno vale 10 punti, per un massimo di 30 punti.
- Scrivete la soluzione degli esercizi in maniera chiara e ordinata e MOTIVANDO OGNI RISPOSTA. Scrivete il vostro nome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.

(1) Si consideri il gruppo simmetrico $\mathcal{S}_5$ su 5 elementi.

(a) Stabilire se $\mathcal{S}_5$ è abeliano motivando la risposta.

(b) È vero o falso che la permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

é un ciclo d'ordine 4? In caso affermativo scomporla in un prodotto di 3 trasposizioni. Si può scomporre σ come un prodotto di 4 trasposizioni?

(c) È vero o falso che il sottogruppo $G = \langle \sigma \rangle$ di $\mathcal{S}_5$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_4$? Elencare esplicitamente gli elementi di G.

(2) Siano X e Y insiemi e sia $\phi : X \to Y$ un'applicazione.

(a) Dimostrare che ϕ iniettiva se e solo se ϕ ha inversa sinistra: è vero o falso che se tale inversa sinistra è unica, allora ϕ è biettiva?

(b) Utilizzando l'assioma della scelta, verificare che ϕ è suriettiva se e solo se ϕ ha inversa destra: è vero o falso che se tale inversa destra è unica, allora ϕ è biettiva?

(3) Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ una radice del polinomio $x^5 - 14x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 4x + 10 \in \mathbb{Q}[x]$ e sia $\imath$ l'unità immaginaria di $\mathbb{C}$.

(a) Stabilire se $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ è riducibile.

(b) Determinare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$.

(c) Stabilire se α è invertibile in $\mathbb{Q}[\alpha]$ e, in caso afirmativo, calcolarne l'inverso.

(d) È vero o falso che $\imath \in \mathbb{Q}(\alpha)$?

ISTITUZIONI DI ALGEBRA E GEOMETRIA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA

15/05/2023

Istruzioni.

- Risolvete i 3 esercizi proposti. Ognuno vale 10 punti, per un massimo di 30 punti.
- Scrivete la soluzione degli esercizi in maniera chiara e ordinata e MOTIVANDO OGNI RISPOSTA. Scrivete il vostro nome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.

(1) Siano dati i gruppi $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$ e $H = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$.

(a) Esiste un isomorfismo dei gruppi additivi G e H?

(b) Elencare gli elementi dei gruppi moltiplicativi G^* e H^*.

(c) Esiste un isomorfismo dei gruppi G^* e $(\mathbb{Z}_6, +)$? E dei gruppi G^* e $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)$?

(2) Sia A un anello commutativo con unità e $I \subset A$ un suo ideale. Il radicale $rad(I)$ di I è

$$rad(I) := \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ } tale \text{ } che \text{ } a^n \in I\}$$

(a) Verificare che $rad(I)$ è un ideale di A.

(b) Verificare che $I \subset rad(I)$. Dimostrare che se I è primo allora $I = rad(I)$.

(c) Trovare esplicitamente nell'anello $\mathbb{Z}$ un ideale I tale che $I \neq rad(I)$ e trovare il suo radicale $rad(I)$.

(3) Si consideri il polinomio $p(x) := x^3 - x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$ è sia l'ideale $I = (p(x))$.

(a) È $\mathbb{Z}_5[x]/I$ un dominio di integrità? In caso negativo, trovare esplicitamente un divisore dello zero.

(b) Trovare un ideale massimale J tale che $I \subset J$.

(c) Trovare la cardinalità e la caratteristica di $\mathbb{Z}_5[x]/J$.

ISTITUZIONI DI ALGEBRA E GEOMETRIA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA

14/06/2023

Istruzioni.

- Risolvete i 3 esercizi proposti. Ognuno vale 10 punti, per un massimo di 30 punti.

- Scrivete la soluzione degli esercizi in maniera chiara e ordinata e MOTIVANDO OGNI RISPOSTA. Scrivete il vostro nome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.

(1) Per ogni intero $n > 1$ sia $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri enteri modulo n.

(a) Che condizioni devono soddisfare $n, m \in \mathbb{Z}$ per avere un omomorfismo iniettivo di gruppi additivi $\phi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$?

(b) Che condizioni devono soddisfare $n, m \in \mathbb{Z}$ per avere un omomorfismo suriettivo di gruppi additivi $\phi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$?

(c) Quanti omomorfismi di gruppi additivi essistono da $\mathbb{Z}_9$ verso $\mathbb{Z}_{12}$? Calcularne il nucleo.

(2) Stabilire se il seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} 2x \equiv 1 (mod\ 3) \\ 3x \equiv 2 (mod\ 7) \end{cases}$$

ha soluzione. In caso affermativo, determinarne tutte le soluzioni in $\mathbb{Z}$.

(3) Sia k un campo. Ogni polinomio $p(x) \in k[x]$ può essere scritto nella forma $p(x) := \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ove $a_i = 0$ per ogni $i > deg(p)$. Si consideri

$$I = \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in k[x] \mid \sum_{i=0}^{\infty} a_i = 0\}.$$

Sia poi $J \subset k[x]$ l'ideale generato da $x^3 + 1$.

(a) Verificare che I è un ideale in $k[x]$.

(b) Si determini, se esiste, un polinomio monico $m(x) \in I$ di grado minimo.

(c) Stabilire se I è primo.

(d) È vero che $x^2 + 5x + 7 \in I + J$?

ISTITUZIONI DI ALGEBRA E GEOMETRIA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA

18/09/2023

Istruzioni.

- Risolvete i 3 esercizi proposti. Ognuno vale 10 punti, per un massimo di 30 punti.
- Scrivete la soluzione degli esercizi in maniera chiara e ordinata e MOTIVANDO OGNI RISPOSTA. Scrivete il vostro nome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.

(1) Sia $n \geq 2$. Si consideri il gruppo simmetrico $\mathcal{S}_n$ su n elementi.

(a) Stabilire per quali n il gruppo $\mathcal{S}_n$ è abeliano motivando la risposta.

(b) È vero o falso che la permutazione di $\mathcal{S}_4$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

é un ciclo d'ordine 3? In caso affermativo scomporla in un prodotto di 2 trasposizioni. Si può scomporre σ come un prodotto di 3 trasposizioni?

(c) Trovare σ^{-1}.

(2) Sia A un anello con $1_A \neq 0_A$, X un insieme non vuoto e A^X l'insieme delle funzione da X verso A, con la struttura indotta di anello. Sia $x \in X$ fissato e siano

$$I_x := \{\phi \in A^X \mid \phi(x) = 0_A\}, \quad J_x := \{\phi \in A^X \mid \phi(x) = 1_A\}$$

(a) Dimostrare che I_x è un ideale proprio in A^X.

(b) Stabilire se J_x è un ideale.

(c) Dimostrare che $A^X/I_x \cong A$.

(3) Sia $\zeta := e^{\frac{2\pi}{5} i} \in \mathbb{C}$ una radice quinta della unità.

(a) Trovare il polinomio minimo $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ di ζ.

(b) Siano $\alpha := \zeta + \zeta^4, \beta := \zeta^2 + \zeta^3$. Usare il teorema di Ruffini per calcolare $\alpha.\beta$ e $\alpha + \beta$. Trovare il polinomio $q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ di grado 2 del quale α e β sono radici.