Istituzioni di Algebra e Geometria
Prova scritta di Algebra
25 Giugno 2020

Istruzioni.

- Scegliete i 3 esercizi che vi piacciono di più tra i 5 proposti qui sotto.
- Risolvete i 3 esercizi scelti: ognuno vale 10 punti, per un massimo di 30 punti. Scrivete esplicitamente quali esercizi avete scelto: correggerò SOLO quei 3.
- Scrivete la soluzione degli esercizi in maniera chiara e ordinata e MOTIVANDO OGNI RISPOSTA.
- Durante la prova non si possono utilizzare fogli personali, appunti, libri, calcolatrici.
- Alla fine della prova seguite le istruzioni e caricate il vostro elaborato. Poi, ENTRO 10 MINUTI dalla fine della prova, allegate una foto o una scannerizzazione della stessa prova tramite portale della didattica, caricandola su "consegna elaborati".

1. (a) Siano X, Y, G tre insiemi e si considerino

$$G^Y = \{f \mid f : Y \to G\}, \quad G^X = \{g \mid g : X \to G\};$$

infine, sia fissata un'applicazione suriettiva $\alpha : X \to Y$. Si definisca quindi l'applicazione

$$\begin{aligned} \chi : G^Y &\to G^X \\ f &\mapsto f \circ \alpha. \end{aligned}$$

Dimostrare che χ è un'applicazione iniettiva.

(b) Supponiamo adesso che G sia un gruppo moltiplicativo. Date $g, h \in G^X$ definiamo

$$\begin{aligned} gh\colon X &\to G \\ a &\mapsto g(a)h(a). \end{aligned}$$

Verificare che G^X con tale operazione è un gruppo.

(c) Nelle ipotesi del punto (b) qui sopra, verificare che G^X è abeliano se e solo se G è abeliano.

2. Nel gruppo simmetrico S_8 si considerino le permutazioni

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 5 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

   (a) Decomporre $\alpha\beta$ in un prodotto di cicli disgiunti.
   (b) Calcolare $\operatorname{sgn}(\alpha\beta)$ e $\operatorname{ord}(\alpha\beta)$.
   (c) Esistono cicli in S_8 di ordine 12?

3. Sia A un anello commutativo con unità e I un suo ideale. Il radicale di I è

$$\sqrt{I} = \{\ a \in A \mid \exists\ n \in \mathbb{N} \text{ tale che } a^n \in I\ \}.$$

   (a) Verificare che $I \subseteq \sqrt{I}$.
   (b) Dimostrare che se $a \in \sqrt{I}$ allora esiste $N \in \mathbb{Z}$ tale che $a^m \in I$ per ogni $m \geq N$.
   (c) Verificare che se $a, b \in \sqrt{I}$ allora anche $-a$ e $a + b$ sono in $\sqrt{I}$, e dedurre che $\sqrt{I}$ è un ideale.

4. Siano dati i gruppi $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ e $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$.

   (a) Esiste un isomorfismo dei gruppi additivi G e H?
   (b) Elencare gli elementi dei gruppi moltiplicativi G^* e H^*.
   (c) Esiste un isomorfismo dei gruppi moltiplicativi G^* e H^*?

5. Si consideri il polinomio $p(x) = x^2 + x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ e sia $I = (p(x))$.

   (a) Verificare che I non è né massimale, né primo.
   (b) Determinare due ideali distinti J' e J'' contenenti I e tali che $J' + J'' = \mathbb{Q}[x]$.
   (c) Calcolare gli zero–divisori di $\mathbb{Q}[x]/I$.

Istituzioni di Algebra e Geometria

Prova scritta di Algebra

10 Luglio 2020

Istruzioni.

- Scegliete i 3 esercizi che vi piacciono di più tra i 5 proposti qui sotto.
- Risolvete i 3 esercizi scelti: ognuno vale 10 punti, per un massimo di 30 punti. Scrivete esplicitamente quali esercizi avete scelto: correggerò SOLO quei 3.
- Scrivete la soluzione degli esercizi in maniera chiara e ordinata e MOTIVANDO OGNI RISPOSTA.
- Durante la prova non si possono utilizzare fogli personali, appunti, libri, calcolatrici.
- Alla fine della prova mostrate i fogli che avete scritto alla webcam, prima di chiudere tutto. Poi, ENTRO 10 MINUTI dalla fine della prova, allegate una foto o una scannerizzazione della stessa prova tramite portale della didattica, caricandola su "consegna elaborati".

1. Sia G un gruppo. Si ricordi che il centro di G è il sottoinsieme

$$Z(G) = \{\ x \in G \mid gx = xg\ \forall\, g \in G\ \}.$$

   (a) Dimostrare che $Z(G)$ è un sottogruppo di G.
   (b) Dimostrare che $Z(G) = G$ se e solo se G è abeliano.
   (c) Determinare il centro del gruppo simmetrico $Z(S_n)$, per $n \geq 3$.

2. Sia $\alpha = 3 + i\sqrt{3} \in \mathbb{C}$.

   (a) Dimostrare che α è algebrico su $\mathbb{Q}$ e trovarne il polinomio minimo $p(x)$.
   (b) Spiegare perché $K = \mathbb{Q}[\alpha]$ è un campo, estensione algebrica di $\mathbb{Q}$ di dimensione 2.
   (c) Dimostrare perché K non può essere un'estensione di $\mathbb{R}$.

3. Si consideri il gruppo $\mathbb{Z}_{12}^*$ degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{12}$, con l'usuale moltiplicazione indotta da $\mathbb{Z}$.

   (a) Elencare gli elementi di $\mathbb{Z}_{12}^*$ e scriverne la tabella di moltiplicazione.

   (b) Stabilire se il gruppo $\mathbb{Z}_{12}^*$ è isomorfo al gruppo additivo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, e in caso di risposta positiva scrivere esplicitamente un tale isomorfismo.

   (c) Stabilire se il gruppo $\mathbb{Z}_{12}^*$ è isomorfo al gruppo additivo $\mathbb{Z}_4$, e in caso di risposta positiva scrivere esplicitamente un tale isomorfismo.

4. Sull'insieme $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ si definisca la relazione $\sim$ ponendo, per ogni $(a, b), (c, d) \in A$:

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \text{se} \quad ad^2 - b^2c = 0.$$

   (a) Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.

   (b) Dimostrare che l'insieme quoziente $A/_\sim$ è un insieme infinito.
   (Suggerimento: se per assurdo $A/_\sim = \{[(a_1, b_1)]_\sim, \ldots, [(a_n, b_n)]_\sim\}$, allora ...)

   (c) Stabilire se la funzione

$$\begin{aligned} A/_\sim &\to \mathbb{C} \\ [(a, b)]_\sim &\mapsto a + ib \end{aligned}$$

   è ben definita.

5. Si consideri la permutazione di S_6

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Scrivere σ come prodotto di cicli disgiunti, e se ne calcoli il segno.

   (b) Calcolare quanti elementi contiene il sottogruppo $< \sigma >$ di S_6.

   (c) Data la permutazione

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

   calcolare i prodotti $\sigma\tau$ e $\tau\sigma$.

Istituzioni di Algebra e Geometria

Prova scritta di Algebra

15 Settembre 2020

Istruzioni.

- Scegliete i 3 esercizi che vi piacciono di più tra i 5 proposti qui sotto.
- Risolvete i 3 esercizi scelti: ognuno vale 10 punti, per un massimo di 30 punti. Scrivete esplicitamente quali esercizi avete scelto: correggerò SOLO quei 3.
- Scrivete la soluzione degli esercizi in maniera chiara e ordinata e MOTIVANDO OGNI RISPOSTA.
- Durante la prova non si possono utilizzare fogli personali, appunti, libri, calcolatrici.
- Alla fine della prova mostrate i fogli che avete scritto alla webcam, prima di chiudere tutto. Poi, ENTRO 10 MINUTI dalla fine della prova, allegate una foto o una scannerizzazione della stessa prova tramite portale della didattica, caricandola su “consegna elaborati”.

1. Sia $f(x) = x^3 + x^2 + 2 \in \mathbb{Z}[x]$. Si consideri la sua riduzione modulo p: $\overline{f}(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$.
   (a) Dimostrare che per $p = 3$ il polinomio $\overline{f}(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$ è irriducibile su $\mathbb{Z}_3$.
   (b) Dimostrare che per $p = 5$ il polinomio $\overline{f}(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ è irriducibile su $\mathbb{Z}_5$.
   (c) Dimostrare che invece $\overline{f}(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$ è riducibile e trovarne i fattori irriducibili.

2. Sia $k \in \mathbb{Z}$ un intero fissato, e si consideri l'insieme

$$A_k = \left\{ \begin{pmatrix} x & yk \\ y & x \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{Q} \right\}.$$

   (a) Dimostrare che A_k è un sottoanello dell'anello $M(2, \mathbb{Q})$ delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{Q}$ per ogni intero k.
   (b) Dimostrare che A_k è commutativo per ogni intero k.
   (c) Dimostrare che A_k è un dominio d'integrità se e solo se k non è un quadrato in $\mathbb{Z}$.

3. Si ricordi che $A_n \leq S_n$ è il sottogruppo delle permutazioni pari del gruppo simmetrico S_n.

   (a) Sia $\sigma \in A_n$, con $n \geq 4$, tale che $\sigma(a) = b \neq a$: dimostrare che se $c, d \notin \{ a, b \}$ con $c \neq d$ allora dato il ciclo $\tau = (b\, c\, d)$ si ha che $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

   (b) Si ricordi che il centro di un gruppo G è il sottogruppo

   $$Z(G) = \{ x \in G \mid gx = xg \ \forall\, g \in G \}.$$

   Dimostrare che $Z(A_n) = \{ 1 \}$ per $n \geq 4$.

   (c) Determinare $Z(A_3)$.

4. Si consideri il polinomio $p(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Z}[x]$ e sia $I = (p(x))$ l'ideale generato da $p(x)$.

   (a) Dimostrare che I è un ideale primo.

   (b) Verificare che I non è massimale, trovando un ideale massimale J contenente I.

   (c) È vero o falso che tutti gli elementi non nulli di $\mathbb{Z}[x]/I$ sono invertibili? Perché?

5. Siano G e G' gruppi e sia $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, G')$ un omomorfismo.

   (a) Dimostrare che se $K' \lhd G'$ è un sottogruppo normale, allora $\varphi^{-1}(K') \lhd G$ è un sottogruppo normale.

   (b) Dimostrare che se $H \leq G$ è un sottogruppo, allora $\varphi(H) \leq G'$ è un sottogruppo.

   (c) Dimostrare che se $K \lhd G$ è un sottogruppo normale e φ è un epimorfismo, allora $\varphi(K) \lhd G'$ è sottogruppo normale. Cosa non funzionerebbe se φ non fosse suriettivo?