Istituzioni di Algebra e Geometria

Prova scritta di Algebra

SIMULAZIONE

Istruzioni.

- Scrivete cognome, nome, matricola in STAMPATELLO MAIUSCOLO negli appositi spazi.
- Scegliete i 3 esercizi che vi piacciono di più tra i 5 proposti e risolvete quelli: ognuno vale 10 punti, per un massimo di 30 punti.
- Scrivete esplicitamente quali esercizi avete scelto nella tabellina qui sotto. Io correggerò SOLO quei 3.
- Scrivete la soluzione degli esercizi in maniera chiara e ordinata e MOTIVANDO OGNI RISPOSTA.
- Durante la prova non si possono appunti, libri, calcolatrici.

COGNOME: ______________________________

NOME: ______________________________

MATRICOLA: ______________________________

ESERCIZI SCELTI:

1. Sia
$$\mathbb{Z}_{(2)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z},\ b \notin 2\mathbb{Z} \right\}$$
(cioè l'insieme dei razionali rappresentabili da almeno una frazione con denominatore dispari).

   (a) Verificare che $\mathbb{Z}_{(2)}$ è un sottoanello di $\mathbb{Q}$ contenente $\mathbb{Z}$.

   (b) Determinare una condizione necessaria e sufficiente su un intero $a \in \mathbb{Z}$ affinché esso sia invertibile in $\mathbb{Z}_{(2)}$.

   (c) È vero o falso che $\mathbb{Z}_{(2)}$ è un sottocampo di $\mathbb{Q}$?

   (d) Dimostrare che
$$I_2 = \left\{ \frac{2a}{b} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z},\ b \notin 2\mathbb{Z} \right\}$$
   è un ideale proprio di $\mathbb{Z}_{(2)}$, ma non è un ideale di $\mathbb{Q}$.

2. Siano G e H due gruppi (entrambi con notazione moltiplicativa), e sia $\varphi : G \to H$ un omomorfismo di gruppi.

   (a) Dimostrare che se φ è suriettivo e G è ciclico, allora anche H è ciclico.

   (b) Dimostrare che se φ è iniettivo e H è ciclico, allora anche G è ciclico.

   (c) Dimostrare che se φ è un isomorfismo, allora $\mathrm{ord}(g) = \mathrm{ord}(\varphi(g))$ per ogni $g \in G$.

3. Sia S_n il gruppo simmetrico delle permutazioni di n elementi, e $A_n < S_n$ il sottogruppo delle permutazioni pari.

   (a) Supponiamo $n \geq 3$, e sia $\sigma \in S_n$ tale che $\sigma(a) = b \neq a$: dimostrare che se $c \notin \{a, b\}$ e indichiamo con $\tau_{bc} = (b\,c)$ la trasposizione che scambia b e c, allora $\sigma\tau_{bc} \neq \tau_{bc}\sigma$.

   (b) Dimostrare che $Z(S_n) = \{1\}$ $(n \geq 3)$, dove $Z(G)$ denota il centro di un gruppo G.

   (c) Cosa si può dire di $Z(A_3)$, il centro del sottogruppo $A_3 < S_3$?

   (d) Calcolare $Z(S_2)$.

4. Sia $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \{p(\sqrt{5}) \in \mathbb{C} \mid p(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$.

   (a) Calcolare il polinomio minimo di $\sqrt{5}$ su $\mathbb{Q}$.

   (b) Dimostrare che $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ è un campo i cui elementi si scrivono in modo unico nella forma $a + b\sqrt{5}$ con $a, b \in \mathbb{Q}$.

   (c) Determinare $a, b \in \mathbb{Q}$ per cui valga l'uguaglianza $(\sqrt{5})^{-1} = a + b\sqrt{5}$.

   (d) Verificare che $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$.

5. Sia $A = \mathbb{Q}[x]$ l'anello dei polinomi nella variabile x a coefficienti in $\mathbb{Q}$ e sia $I \subseteq A$ l'ideale generato dal polinomio $p(x) = x^2 - 2x + 1$.

   (a) Dimostrare che I non è massimale.

   (b) Determinare un ideale massimale $J \subseteq A$ contenente I.

   (c) Verificare che la classe $\overline{f(x)}$ del polinomio $f(x) = x$ nel quoziente A/I è invertibile, e calcolarne esplicitamente l'inverso.