Istituzioni di Algebra e Geometria — Algebra, a.a. 2025-2026
Soluzioni foglio 5

1. Per definizione, φ è un omomorfismo se e solo se per ogni scelta di $g, h \in G$ si ha
$$ghgh = (gh)^2 = \varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) = g^2h^2 = gghh.$$
Moltiplicando primo e ultimo membro a sinistra per g^{-1} e a destra per h^{-1} deduciamo che φ è un omomorfismo se e solo se per ogni scelta di $g, h \in G$ si ha $hg = gh$, cioè se e solo se G è abeliano.

   Supponiamo ora che G sia abeliano: allora φ è un endomorfismo di G, ma in generale non è biettivo: ad esempio, se $G = \mathbb{R}^*$ gruppo moltiplicativo, l'endomorfismo non è né iniettivo né suriettivo. Anche se consideriamo $G = \mathbb{Z}$ come gruppo additivo (e quindi l'endomorfismo $\varphi : z \mapsto 2z$), la mappa è un endomorfismo, è iniettiva ma non suriettiva. Infine, se restringiamo l'endomorfismo $g \mapsto g^2$ al gruppo $G = \mathbb{R}_{>0}$ dei numeri reali strettamente positivi (con il prodotto), allora otteniamo un automorfismo.

2. Cominciamo a verificare che φ è un endomorfismo: dati $g, h \in G$, allora, usando la commutatività dell'operazione di G, abbiamo che
$$\varphi(gh) = (gh)^m = g^m h^m = \varphi(g)\varphi(h).$$
Per dimostrare che φ è un automorfismo dobbiamo dimostrare che è biettivo. Cominciamo a calcolarne il nucleo:
$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = g^m = 1_G\}.$$
Quindi per ogni elemento $g \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, l'ordine γ del sottogruppo ciclico $<g>$ divide m: d'altra parte essendo $<g>$ un sottogruppo di G, per Lagrange il suo ordine γ divide $n = |G|$. Per ipotesi però $\mathrm{MCD}(n, m) = 1$, quindi $\gamma = 1$, cioè $g = 1_G$. Quindi $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{1_G\}$ e φ è iniettivo, e siccome è una funzione iniettiva da un insieme finito in se stesso, è anche suriettivo, e quindi è un automorfismo.

3. Utilizziamo la notazione moltiplicativa sia in G che in H.
   (a) Siano $n = \mathrm{ord}(g)$ e $m = \mathrm{ord}(\varphi(g))$. Allora
   $$1_H = \varphi(1_G) = \varphi(g^n) = \varphi(g)^n,$$
   quindi necessariamente $m|n$.
   (b) Osserviamo che
   $$\varphi(g^m) = \varphi(g)^m = 1_H = \varphi(1_G),$$
   quindi se φ è iniettivo necessariamente $g^m = 1_G$, e quindi $n|m$. Quindi abbiamo due numeri naturali $n, m \in \mathbb{N}$, tali che $n|m$ e, dalla parte (a), $m|n$: segue che $n = m$.

4. Utilizziamo la notazione moltiplicativa sia in G che in H.

   (a) È una conseguenza del fatto che ogni sottogruppo di un gruppo ciclico è ciclico, che abbiamo visto a lezione il 21 ottobre. Infatti il monomorfismo φ induce un isomorfismo di G sull'immagine: $G \simeq \mathrm{Im}(\varphi) < H$.

   (b) Sia $G = <g>$ e sia $h \in H$. Allora esiste $\gamma \in G$ tale che $\varphi(\gamma) = h$, poiché φ è suriettivo. Se $\gamma = g^m$, allora $h = \varphi(g)^m$. Quindi $H = <\varphi(g)>$, cioè H è ciclico.

5. Siano $G = <g>$ e $H = <h>$ due gruppi ciclici (utilizziamo la notazione moltiplicativa in entrambi), e sia H^G l'insieme delle applicazioni $G \to H$. Dall'esercizio 2 del foglio 2, sappiamo che su H^G possiamo definire una struttura di gruppo, definendo come prodotto delle applicazioni φ e ψ l'applicazione $\varphi\psi\colon G \to H$, $x \mapsto \varphi(x)\psi(x)$. Ricordo anche che l'elemento neutro è l'applicazione costante $1 : G \to H$, $x \mapsto 1_H$.

   (a) Per stabilire se $\mathrm{Hom}(G, H)$ è un sottogruppo di H^G usiamo il criterio: se $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(G, H)$ e $x_1, x_2 \in G$ allora:

$$\varphi\psi^{-1}(x_1x_2) = \varphi(x_1x_2)\psi(x_1x_2)^{-1} = \varphi(x_1)\varphi(x_2)\psi(x_1)^{-1}\psi(x_2)^{-1},$$

$$\varphi\psi^{-1}(x_1)\varphi\psi^{-1}(x_2) = \varphi(x_1)\psi(x_1)^{-1}\varphi(x_2)\psi(x_2)^{-1}.$$

   In generale gli ultimi membri di queste catene di uguaglianze non coincidono, quindi non è vero, in generale, che

$$\varphi\psi^{-1}(x_1x_2) = \varphi\psi^{-1}(x_1)\varphi\psi^{-1}(x_2).$$

   Però se H è ciclico allora è anche commutativo, quindi l'uguaglianza è soddisfatta. Concludiamo che se H è ciclico (ma basterebbe anche che fosse solo commutativo), allora $\mathrm{Hom}(G, H)$ è un sottogruppo di H^G.

   (b) Se $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, H)$, abbiamo che

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(g^n) = \varphi(g)^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subseteq H.$$

   Inoltre

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{g^n \mid \varphi(g)^n = 1_H\} :$$

   quindi se $m = \mathrm{ord}(\varphi(g))$, segue che $\mathrm{Ker}(\varphi) = <g^m>$ in G.

   (c) Se $\varphi\colon G \to H$ è un isomorfismo, allora $\mathrm{ord}(g) = |G| = |H| = \mathrm{ord}(h)$. In particolare G è infinito se e solo se anche H lo è. Si noti che ogni isomorfismo è suriettivo, quindi se φ è un isomorfismo $\varphi(g)$ deve generare H. D'altra parte φ deve anche essere iniettivo, quindi usando l'esercizio 3(b) sappiamo che $\mathrm{ord}(\varphi(g)) = \mathrm{ord}(g)$. In totale quindi un isomorfismo $G \to H$ deve necessariamente mandare il generatore g di G nel generatore h di H. Viceversa, è facile verificare che l'applicazione $G \to H$, $g \mapsto h$ è un isomorfismo.

6. Osserviamo che l'intersezione $H \cap K$ è un sottogruppo sia di H che di K (e ovviamente di G stesso). Per il Teorema di Lagrange, l'ordine $|H \cap K|$ deve dividere sia $|H|$ che $|K|$, e poiché per ipotesi $|H|$ e $|K|$ sono coprimi, l'unica possibilità è che $|H \cap K| = 1$, e quindi che $H \cap K = \{1_G\}$.

7. Cominciamo a dimostrare che φ è un omomorfismo: è una conseguenza immediata del fatto che α e β sono omomorfismi e di come è definita l'operazione sul gruppo prodotto $H \times K$. Dati $x, y \in G$, abbiamo che

$$\varphi(xy) = \big(\alpha(xy), \beta(xy)\big) = \big(\alpha(x)\alpha(y), \beta(x)\beta(y)\big) = \big(\alpha(x), \beta(x)\big)\big(\alpha(y), \beta(y)\big).$$

Ora analizziamo

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(\varphi) &= \{x \in G \mid \varphi(x) = (\alpha(x), \beta(x)) = (1_H, 1_K) = 1_{H\times K}\}\\ &= \{x \in G \mid \alpha(x) = 1_H \text{ e } \beta(x)) = 1_K\}\\ &= \{x \in G \mid x \in \mathrm{Ker}(\alpha) \cap \mathrm{Ker}(\beta)\} = \{1_G\},\end{aligned}$$

quindi φ è iniettivo.

8. Usando il criterio di normalità, dobbiamo dimostrare che per ogni $h \in H$ e $\gamma \in G$ si ha $\gamma h \gamma^{-1} \in H$. Intanto osserviamo che se un elemento $h = h_1 h_2$ è il prodotto di altri 2 elementi di H, allora

$$\gamma h \gamma^{-1} = \gamma h_1 h_2 \gamma^{-1} = (\gamma h_1 \gamma^{-1})(\gamma h_2 \gamma^{-1}).$$

Ora, poiché ogni elemento di H è della forma

$$h = \prod_{i=1}^{n} g_i^2,$$

deduciamo che basta dimostrare la tesi per gli elementi della forma $g^2 \in H$: in tal caso

$$\gamma g^2 \gamma^{-1} = (\gamma g \gamma^{-1})(\gamma g \gamma^{-1}) = (\gamma g \gamma^{-1})^2 \in H.$$

9. Ricordiamo il centro di un gruppo G è il sottogruppo

$$Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx \ \forall\ g \in G\}.$$

   (a) Sia $H \subseteq Z(G)$; verifichiamo che $H \lhd G$ è un sottogruppo normale usando il criterio. Siano $h \in H$ e $g \in G$, allora in particolare h commuta con g, e quindi

   $$ghg^{-1} = hgg^{-1} = h \in H.$$

   (b) Se H ha due elementi, significa che $H = \{1_G, h\}$ per qualche h. Poiché H è normale in G, per ogni $g \in G$ si ha $ghg^{-1} \in H = \{1_G, h\}$. Quindi ci sono due opzioni: o $ghg^{-1} = 1_G$, oppure $ghg^{-1} = h$. Nel primo caso moltiplicando entrambi i membri dell'equazione a destra per g e a sinistra per g^{-1} otteniamo $h = 1_G$, che comunque appartiene al centro. Se invece $ghg^{-1} = h$ allora moltiplicando a destra per g segue che $gh = hg$, e quindi $H \subseteq Z(G)$.

10. (a) Osserviamo subito che fissato $g \in G$, $gHg^{-1} \neq \emptyset$. Usiamo quindi il criterio per sottogruppi: consideriamo due elementi α e β di gHg^{-1}, diciamo $\alpha = gag^{-1}$ e $\beta = gbg^{-1}$, con $a, b \in H$. Allora
$$\alpha\beta^{-1} = (gag^{-1})(gbg^{-1})^{-1} = gag^{-1}gb^{-1}g^{-1} = g(ab^{-1})g^{-1},$$
e siccome H è un sottogruppo, $ab^{-1} \in H$, e quindi $\alpha\beta^{-1} \in gHg^{-1}$.

(b) Se H è normale, per ogni $g \in G$ e $h \in H$ si ha $ghg^{-1} \in H$, quindi $gHg^{-1} \subseteq H$. Per l'inclusione opposta, sia $g \in G$ fissato e sia $h \in H$ un elemento qualsiasi. Il prodotto $g^{-1}h \in g^{-1}H$ classe laterale sinistra, ma poiché H è normale, $g^{-1}H = Hg^{-1}$, e quindi esiste $h' \in H$ tale che $g^{-1}h = h'g^{-1}$. Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione per g sulla sinistra, deduciamo che $h = gh'g^{-1} \in gHg^{-1}$, e quindi in conclusione $H = gHg^{-1}$.

(c) $Core_G(H)$ è l'intersezione di sottogruppi di G (per la parte (a) dell'esercizio), e quindi è sicuramente un sottogruppo di G. Usiamo adesso il criterio di normalità; siano $\gamma \in G$ e $k \in Core_G(H)$: per definizione, per ogni $g \in G$ esiste $h_{g,k} \in H$ tale che l'elemento k si può scrivere come $k = gh_{g,k}g^{-1}$. Ma allora per ogni $g \in G$:
$$\gamma k \gamma^{-1} = \gamma(gh_{g,k}g^{-1})\gamma^{-1} = (\gamma g)h_{g,k}(\gamma g)^{-1} \in Core_G(H).$$

(d) Se $N \subseteq H$ è normale in G allora per ogni $n \in N$ e $\gamma \in G$ si ha che $\gamma n \gamma^{-1} \in N$, cioè $n \in gNg^{-1} \subseteq gHg^{-1}$, con $g = \gamma^{-1}$. Concludiamo che $n \in Core_G(H)$.

11. (a) Poniamo $H = \varphi^{-1}(H')$ e siano $h \in H$ e $g \in G$: vogliamo dimostrare che $ghg^{-1} \in H$ o, in altre parole, che
$$\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1} \in H'.$$
Ma poiché H' è normale in G' e $\varphi(h) \in H'$, la tesi segue immediatamente.

(b) Poniamo $H' = \varphi(H)$ e siano $h' \in H'$ e $g' \in G'$: vogliamo dimostrare che $g'h'g'^{-1} \in H' = \varphi(H)$. Per la definizione di H' e la suriettività di φ, esistono $h \in H$ e $g \in G$ tali che $h' = \varphi(h)$ e $g' = \varphi(g)$. Quindi
$$g'h'g'^{-1} = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1} = \varphi(ghg^{-1}).$$
Poiché H è normale in G sappiamo che $ghg^{-1} \in H$, dunque $\varphi(ghg^{-1}) \in H'$, e quindi H' è normale in G'.

12. Vi ricordo che $[G, G]$ è il sottogruppo di G generato dagli elementi $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$, cioè l'insieme i cui elementi sono tutti e soli i prodotti della forma $\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$. Non è detto che ogni elemento di $[G, G]$ sia della forma $[a, b]$.

(a) Sia $g \in G$: allora
$$\begin{aligned} g[a,b]g^{-1} &= g(aba^{-1}b^{-1})g^{-1} = (gag^{-1})(gbg^{-1})(ga^{-1}g^{-1})(gb^{-1}g^{-1}) \\ &= (gag^{-1})(gbg^{-1})(gag^{-1})^{-1}(gbg^{-1})^{-1} = [gag^{-1}, gbg^{-1}] \in [G, G]. \end{aligned}$$

Se $\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i] \in [G,G]$ e $g \in G$ allora, usando un ragionamento quasi uguale a quello fatto nella soluzione dell'esercizio 8, deduciamo che

$$g\left(\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i]\right)g^{-1} = \prod_{i=1}^{n}\left(g[a_i,b_i]g^{-1}\right).$$

Per quanto visto sopra, il membro di destra è un prodotto di elementi di $[G,G]$, quindi è un elemento di $[G,G]$ esso stesso: in particolare $[G,G]$ è normale in G.

(b) Dati due elementi $a,b \in G$, poiché $aba^{-1}b^{-1} = [a,b] \in [G,G]$, segue che $\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{b}\cdot\overline{a}$ nel quoziente $G/[G,G]$, che quindi risulta essere abeliano.

(c) Se G/H è abeliano, per ogni coppia $a,b \in G$ segue che $\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{b}\cdot\overline{a}$, cioè $aba^{-1}b^{-1} \in H$. Perciò per ogni coppia $a,b \in G$ si ha $[a,b] = aba^{-1}b^{-1} \in H$, ovvero $[G,G] \subseteq H$. Viceversa, se $[G,G] \subseteq H$ allora $G/H \subseteq G/[G,G]$, che come abbiamo visto nella parte (b) è abeliano.

13. Usando le notazioni delle note, siano R la rotazione di $2\pi/n$ radianti in senso antiorario, δ la riflessione rispetto all'asse delle ascisse, e $D_k = R^k\delta$ la riflessione rispetto alla retta per l'origine che forma un angolo di $k\pi/n$ rispetto al semiasse positivo delle ascisse in senso antiorario. Abbiamo dunque che

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \{\text{rotazioni}\} \cup \{\text{riflessioni}\}\\ &= \{1 = R^0,\ R,\ R^2,\dots,\ R^{n-1}\} \cup \{\delta = R^0\delta,\ R\delta,\ R^2\delta,\dots,\ R^{n-1}\delta\}\\ &= \{1, R, R^2,\dots,R^{n-1}\} \cup \{D_0, D_1,\dots,D_{n-1}\}.\end{aligned}$$

L'ordine di ogni elemento di Δ_7 deve dividere $|\Delta_7| = 14$, quindi può essere 1, 2, 7, o 14. L'ordine di un elemento è 1 se e solo se l'elemento è l'unità del gruppo. Se esistesse un elemento di ordine 14, allora il gruppo Δ_7 dovrebbe essere ciclico, quindi commutativo. Poiché Δ_7 non è commutativo, i possibili ordini dei suoi elementi sono 2 e 7.

Per definizione, la rotazione R ha ordine 7, e tutte le riflessioni hanno ordine 2. Rimangono da analizzare gli elementi $R^2,\dots,R^{n-1}$; poiché però 7 è un numero primo, segue che $R^h \in <R>$ ha ordine 7 per ogni $h \neq 0$.

Ragionando come nel caso precedente, i possibili ordini degli elementi di $\Delta_8 \setminus \{1\}$ sono 2, 4, e 8. La rotazione R ha ordine 8, e le riflessioni hanno tutte ordine 2. Analizziamo ora gli elementi $R^h \in <R>$, con $2 \leq h \leq 7$. Si verifica facilmente che R^3, R^5 e R^7 hanno ordine 8.

Invece risulta $(R^2)^4 = R^8 = 1$ e $(R^6)^4 = R^{24} = 1$, quindi l'ordine di R^2 e R^6 è o 2 o 4. Per capire quale sia quello giusto, denotiamo i vertici dell'ottagono $V_0, V_1,\dots,V_7$ procedendo in senso orario a partire dal vertice V_0 sul semiasse positivo delle ascisse; poiché $(R^2)^2(V_0) = R^4(V_0) = V_4 \neq V_0$ e similmente $(R^6)^2(V_0) = R^12(V_0) = R^4(V_0) = V_4 \neq V_0$, il loro ordine è 4. Infine $(R^4)^2 = 1$ e $R^4(V_0) = V_4 \neq V_0$, quindi l'ordine di R^4 è 2.

14. Consideriamo un esagono regolare, e usiamo la notazione dell'esercizio precedente (e delle note). Detta R la rotazione di $\pi/3$ radianti in senso antiorario e δ la riflessione rispetto all'asse delle ascisse (di modo che $D_k = R^k\delta$ sia la riflessione rispetto alla retta per l'origine che forma un angolo di $k\pi/n$ rispetto al semiasse positivo delle ascisse, in senso antiorario), i 12 elementi del gruppo diedrale sono

$$\Delta_6 = \{1, R, R^2, R^3, R^4, R^5, \delta, R\delta, R^\delta, R^3\delta, R^4\delta, R^5\delta\},$$

con le relazioni

$$\delta^2 = R^6 = 1 \quad \text{e} \quad \delta R = R^5\delta.$$

Inoltre si ha che

$$<\delta>= \{1, \delta\}, \qquad <R^2>= \{1, R^2, R^4\}.$$

(a) Tenendo conto che l'indice $[\,\Delta_6 :<\delta>] = |\Delta_6|/|<\delta>| = 6$ e della relazione $\delta R = R^5\delta$, le classi laterali destre di Δ_6 rispetto a $<\delta>$ sono tutte e sole:

$$<\delta>1 = \{1, \delta\}, \qquad <\delta>R = \{R, R^5\delta\}, \qquad <\delta>R^2 = \{R^2, R^4\delta\},$$

$$<\delta>R^3 = \{R^3, R^3\delta\}, \qquad <\delta>R^4 = \{R^4, R^2\delta\}, \qquad <\delta>R^5 = \{R^5, R\delta\}.$$

Similmente, tenendo conto dell'indice $[\,\Delta_6 :<R^2>] = |\Delta_6|/|<R^2>| = 4$ e della relazione $\delta R = R^5\delta$, le classi laterali destre di Δ_6 rispetto a $<R^2>$ sono:

$$<R^2>1 = \{1, R^2, R^4\}, \qquad <R^2>\delta = \{\delta, R^2\delta, R^4\delta\},$$

$$<R^2>R^3 = \{R, R^3, R^5\}, \qquad <R^2>R^3\delta = \{R\delta, R^3\delta, R^5\delta\}.$$

(b) Le classi laterali sinistre di Δ_6 rispetto a $<\delta>$ sono:

$$1<\delta>= \{1, \delta\}, \qquad R<\delta>= \{R, R\delta\}, \qquad R^2<\delta>= \{R^2, R^2\delta\},$$

$$R^3<\delta>= \{R^3, R^3\delta\}, \quad R^4<\delta>R^4 = \{R^4, R^4\delta\}, \quad R^5<\delta>= \{R^5, R^5\delta\}.$$

Le classi laterali destre di Δ_6 rispetto a $<R^2>$ sono:

$$1<R^2>= \{1, R^2, R^4\}, \qquad \delta<R^2>= \{\delta, R^2\delta, R^4\delta\},$$

$$R^3<R^2>= \{R, R^3, R^5\ \}, \qquad R^3\delta<R^2>= \{R\delta, R^3\delta, R^5\delta\}.$$

(c) Da quanto visto sopra $R^2<\delta>\neq<\delta>R^2$.

(d) È un check diretto. In particolare, questo significa che il sottogruppo $<R^2>$ è normale.

15. In tutti i casi l'unità 1 ha ordine 1. Poiché $|\Delta_4| = 8$, gli elementi in $\Delta_4 \setminus \{1\}$ hanno ordine 2 o 4: infatti se ci fosse un elemento g di ordine 8 allora $\Delta_4 = <g>$ sarebbe ciclico e quindi commutativo, cosa che sappiamo essere falsa. Sappiamo che il gruppo dei quaternioni $|Q_8| = 8$. Gli elementi in $Q_8 \setminus \{1\}$ hanno ordine 2 o 4, come già calcolato nell'esercizio 1 del foglio 3.

    Poiché $|\Delta_6| = 12$, gli elementi in $\Delta_6 \setminus \{1\}$ possono avere ordine 2, 3, 4, 6, 12. Con le notazioni usuali osserviamo che D_i ha ordine 2, R^2 ha ordine 3, R ha ordine 6. Sappiamo che Δ_6 non è commutativo, quindi nemmeno ciclico, e quindi non ci possono essere elementi di ordine 12. Infine non ci possono essere elementi di ordine 4: un tale elemento infatti dovrebbe necessariamente essere della forma R^k, e se fosse di ordine 4 il sottogruppo ciclico da lui generato sarebbe un sottogruppo di ordine 4 di $<R>$ (che ha ordine 6), e questo non è possibile.

    Poiché $|A_4| = 12$, gli elementi in $A_4 \setminus \{1\}$ possono avere ordine 2, 3, 4, o 6 (non ci possono essere elementi di ordine 12 per lo stesso motivo che per Δ_6). Ricordiamo dall'esercizio 4 del foglio 4 che nel gruppo alterno A_4, oltre all'identità, ci sono:

    - 3 permutazioni di ordine 2: $(1\,2)(3\,4)$, $(1\,3)(2\,4)$, $(1\,4)(2\,3)$ e
    - 8 permutazioni di ordine 3, che sono tutte 3−cicli: $(1\,2)(1\,3)$, $(1\,2)(1\,4)$, $(1\,3)(1\,2)$, $(1\,3)(1\,4)$, $(1\,4)(1\,2)$, $(1\,4)(1\,3)$, $(2\,3)(2\,4)$, $(2\,4)(2\,3)$.

    Poiché $|\Delta_{12}| = 24$, gli elementi in $\Delta_{12} \setminus \{1\}$ possono avere ordine 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Con le notazioni usuali osserviamo che D_i ha ordine 2, R^6 ha ordine 2, R^4 ha ordine 3, R^3 ha ordine 4, R^2 ha ordine 6, R ha ordine 12. Con gli stessi ragionamenti che abbiamo usato per Δ_6, si dimostra che non ci sono elementi di ordine 8 né 24.

    Si ha $|S_4| = 24$, e, di nuovo dall'esercizio 4 del foglio 4, già sappiamo che gli elementi in $S_4 \setminus \{1\}$ possono avere ordine 2, 3, 4. In dettaglio, oltre all'identità e alle permutazioni pari già elencate per A_4, abbiamo:

    - 6 permutazioni di ordine 2: $(1\,2)$, $(1\,3)$, $(1\,4)$, $(2\,3)$, $(2\,4)$, $(3\,4)$, e
    - 6 permutazioni di ordine 4, che sono tutte 4−cicli: $(1\,2\,3\,4)$, $(1\,2\,4\,3)$, $(1\,3\,4\,2)$, $(1\,3\,2\,4)$, $(1\,4\,3\,2)$, $(1\,4\,2\,3)$.

    Per finire, se G, H sono due gruppi e $\varphi\colon G \to H$ è un isomorfismo, sappiamo dall'esercizio 3 di questo foglio che $\mathrm{ord}(g) = \mathrm{ord}(\varphi(g))$ per ogni $g \in G$. In particolare $\Delta_4 \not\cong Q_8$, perché Q_8 contiene solo un elemento di ordine 2 (cioè -1), mentre Δ_4 ne contiene quattro (le riflessioni), quindi i due gruppi non possono essere isomorfi. Similmente, $\Delta_6 \not\cong A_{12}$, perché Δ_6 contiene elementi di ordine 6 e A_4 no, e $\Delta_{12} \not\cong S_4$, perché Δ_{12} contiene elementi di ordine 12 e S_4 no.

N.B. Ricordate che in generale il metodo per risolvere un esercizio non è unico. Se qualche cosa non vi è chiara, e/o se pensate di aver trovato un errore di stampa, fatemi sapere!