Istituzioni di Algebra e Geometria — Algebra, a.a. 2025-2026
Esercizi, foglio 9

1. (a) Mostrare che $x^4 + n - 1$ è riducibile in $\mathbb{Z}_n[x]$ per ogni $n \geq 1$.
   (b) Mostrare che se $n - 1 \geq 0$ non è un quadrato, $x^4 + n - 1$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$.
   (c) Esiste $n \geq 1$ tale che $x^4 + n - 1$ sia irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$, ma $n - 1$ sia un quadrato?

2. Si consideri $p(x) = x^4 + 2x + 4 \in \mathbb{Z}[x]$.
   (a) Verificare che $p(x)$ non soddisfa le ipotesi del teorema di Eisenstein;
   (b) usare dunque un altro metodo per dimostrare che $p(x)$ è irriducibile su $\mathbb{Z}[x]$.

3. Si consideri $p(x) = x^3 - 3x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ e sia $I = (p(x))$.
   (a) Dimostrare che $p(x)$ è riducibile e verificare che I non è né massimale, né primo.
   (b) Determinare due ideali distinti J' e J'' contenenti I e tali che $J' + J'' = \mathbb{Q}[x]$.
   (c) Calcolare gli zero–divisori di $\mathbb{Q}[x]/I$.
   (d) Descrivere gli elementi $\overline{q(x)} \in \mathbb{Q}[x]/I$ tali che $\overline{q(x)}^2 = \overline{0}$.

4. Si consideri $p(x) = (x + 3)^2 \in \mathbb{Q}[x]$ e sia $I = (p(x))$.
   (a) Dimostrare che I non è né massimale, né primo.
   (b) Calcolare un generatore di $\sqrt{I}$: dedurre che $I \neq \sqrt{I}$.
   (c) Determinare un ideale massimale contenente I.
   (d) Stabilire se esiste $\overline{q(x)} \in \mathbb{Q}[x]/I$ non nullo e tale che $\overline{q(x)}^2 = \overline{1}$.
   (e) Stabilire se esiste $\overline{q(x)} \in \mathbb{Q}[x]/I$ non nullo e tale che $\overline{q(x)}^2 = \overline{0}$.
   (f) Verificare se $\overline{x} \in \mathbb{Q}[x]/I$ è invertibile e, in caso affermativo, determinarne l'inverso.

5. Sia $I = (x^3 - x^2 + 5x, x^2 - x) \subseteq \mathbb{Q}[x]$.
   (a) Determinare un generatore $p(x)$ di I.
   (b) Calcolare $\lambda(x), \mu(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tali che
   $$p(x) = \lambda(x)(x^3 - x^2 + 5x) + \mu(x)(x^2 - x).$$
   (c) Verificare che $\mathbb{Q}[x]/I \cong \mathbb{Q}$.

6. Si consideri $p(x) = x^2 + 2x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$ e sia $I = (p(x))$.
   (a) Stabilire se il polinomio $p(x)$ è irriducibile, e verificare poi che è un elemento di $(2, x)$.
   (b) Stabilire se I è massimale.
   (c) Dire se è vero o falso che esiste $\overline{q(x)} \in \mathbb{Z}[x]/I$ tale che $\overline{q(x)}^2 + \overline{1} = \overline{0}$?
   (d) Determinare tutti gli elementi $\overline{q(x)} \in \mathbb{Z}[x]/I$ tali che $\overline{q(x)}^2 = \overline{0}$.

7. Si consideri $p(x) = x^2 - 5 \in \mathbb{Z}[x]$ e sia $I = (p(x))$.
   (a) Dimostrare che I non è massimale e determinare un ideale massimale contenente I.
   (b) Stabilire se esiste $\overline{q(x)} \in \mathbb{Z}[x]/I$ tale che $\overline{q(x)}^2 = \overline{1}$.
   (c) Verificare se $\overline{3x - 1} \in \mathbb{Z}[x]/I$ è invertibile e, in caso affermativo, determinarne l'inverso.

8. Sia $p(x) = x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ e sia $I = (p(x))$.
   (a) Verificare che $I \subseteq \mathbb{Q}[x]$ è massimale.
   (b) Calcolare la caratteristica di $\mathbb{Q}[x]/I$.
   (c) Mostrare che in ogni classe di $\mathbb{Q}[x]/I$ non nulla esiste esattamente un solo polinomio di grado al più 3.
   (d) Dimostrare che non esistono radici quadrate di -1 in $\mathbb{Q}[x]/I$.

9. Si consideri $p_n(x) = x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{n} \in \mathbb{Z}_3[x]$.
   (a) Determinare i valori di $n \in \mathbb{Z}$ per cui $p_n(x)$ ha radici in $\mathbb{Z}_3$, calcolandole in ciascun caso.
   (b) Stabilire se $\mathbb{Z}_3[x]/(p_2(x))$ è un campo.
   (c) Determinare l'inverso di $\overline{x}$ in $\mathbb{Z}_3[x]/(p_1(x))$.

10. Si consideri $p(x) = x^3 + \overline{2}x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$ e sia $I = (p(x))$.
    (a) Dimostrare che $p(x)$ è irriducibile e mostrare che $\mathbb{Z}_3[x]/I$ è un campo.
    (b) Determinare la caratteristica e la cardinalità di $\mathbb{Z}_3[x]/I$.
    (c) Esiste $\overline{q(x)} \in \mathbb{Z}_3[x]/I$ non nullo e tale che $\overline{q(x)}^2 = \overline{0}$?

N.B. Ricordate che in generale il metodo per risolvere un esercizio non è unico. Se qualche cosa non vi è chiara, e/o se pensate di aver trovato un errore di stampa, fatemi sapere!