Istituzioni di Algebra e Geometria — Algebra, a.a. 2025-2026

Esercizi, foglio 8

1. Dimostrare che l'insieme di matrici
$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$
è un sottoanello commutativo dell'anello $\mathbb{R}^{2,2}$ delle matrici quadrate di ordine due a coefficienti reali. Dimostrare poi che
$$I = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$
è un ideale massimale di A.

2. Sia A un anello commutativo con unità e siano P, Q ideali primi di A. Provare che l'intersezione $P \cap Q$ è un ideale primo di A se e solo se $P \subseteq Q$ oppure $P \supseteq Q$.

3. Sia A un anello commutativo con unità e sia I un suo ideale. Ricordiamo (dall'esercizio 10 del foglio 6) che il radicale di I è l'ideale
$$\sqrt{I} = \{a \in A \mid \text{esiste } n \in \mathbb{N} \text{ tale che } a^n \in I\}.$$
   (a) Verificare che $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
   (b) Dimostrare che se I è un ideale primo, allora $\sqrt{I} = I$.

4. Sia A un PID (un anello commutativo con unità a ideali principali), e sia $I \neq (0_A)$ un ideale di A. Dimostrare che I è un ideale primo se e solo se è un ideale massimale.

5. Si consideri l'insieme $\mathcal{C}^0[0,1]$ delle funzioni continue definite sull'intervallo $[0,1]$ a valori in $\mathbb{R}$, che è un anello commutativo con unità se dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto di funzioni.
   (a) Verificare che l'applicazione
   $$\begin{aligned} v_0 \colon \mathcal{C}^0[0,1] &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \varphi(0) \end{aligned}$$
   è un omomorfismo di anelli unitari.
   (b) Dimostrare che $I = \{ \varphi \in \mathcal{C}^0[0,1] \mid \varphi(0) = 0 \}$ è un ideale di $\mathcal{C}^0[0,1]$.
   (c) È vero o falso che I è massimale? Perché?

6. Calcolare quoziente e resto della divisione di $a(x)$ per $b(x)$ per ciascuna delle seguenti coppie $(a(x), b(x))$ di polinomi.

$$(x^3 - x^2 + 5x,\ x^2 - x), \qquad (x^3 + x^2 + x + 1,\ x^2), \qquad (x^4 + x^2,\ x + 1),$$
$$(x^3 + x^2,\ x^2 + 1), \qquad (x^5 - 1,\ x^3 - 1).$$

7. Si consideri $p(x) = x^2 - 3 \in \mathbb{Z}[x]$ e sia $I = (p(x))$.
   (a) Verificare che I non è massimale e determinare un ideale massimale contenente I.
   (b) Verificare che $\overline{3} \in \mathbb{Z}[x]/I$ non è invertibile.

8. In $\mathbb{Z}[x]$ si consideri l'ideale $I = (2, x)$.
   (a) Verificare che $1 \notin I$.
   (b) Dimostrare che $\mathbb{Z}[x]$ non è un dominio a ideali principali.
   (c) Sia $q(x) \notin I$: mostrare che $\overline{q(x)} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}[x]/I$.
   (d) È vero o falso che l'anello quoziente $\mathbb{Z}[x]/I$ è un campo?

N.B. Ricordate che in generale il metodo per risolvere un esercizio non è unico. Se qualche cosa non vi è chiara, e/o se pensate di aver trovato un errore di stampa, fatemi sapere!