Istituzioni di Algebra e Geometria — Algebra, 2025-2026
Esercizi, foglio 7

1. Calcolare il massimo comune divisore delle seguenti coppie di numeri tramite l'algoritmo d'Euclide, e poi esprimerlo come combinazione lineare dei due interi.
$$(707, 1991), \qquad (3937, 3441), \qquad (5407, 6077), \qquad (14351, 14803).$$

2. (a) Dimostrare che $p \in \mathbb{N}$ è primo se e solo se non ha divisori d tali che $1 < d \leq \sqrt{p}$.
   (b) Stabilire quale fra i seguenti numeri è primo: 431, 433, 435, 437.

3. Siano $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che se $\mathrm{MCD}(a, b) = \mathrm{MCD}(a, c) = 1$, allora $\mathrm{MCD}(a, bc) = 1$.

4. In $\mathbb{Z}$ si considerino i numeri non negativi n e m.
   (a) Verificare che $(n) + (m) = \mathrm{MCD}(n, m)\mathbb{Z}$.
   (b) Verificare che $(n) \cap (m) = \mathrm{mcm}(n, m)\mathbb{Z}$.

5. Dimostrare che valgono le seguenti uguaglianze fra sottogruppi del gruppo additivo $\mathbb{Z}$:
$$n\mathbb{Z} \vee m\mathbb{Z} = \mathrm{MCD}(n, m)\mathbb{Z}, \qquad n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = \mathrm{mcm}(n, m)\mathbb{Z}.$$

6. Siano $a, b \in \mathbb{Z}$.
   (a) Dimostrare che se $d = \mathrm{MCD}(a, b)$ allora $\frac{a}{d}$ e $\frac{b}{d}$ sono coprimi.
   (b) Dimostrare che per ogni $c \in \mathbb{Z}$ risulta $\mathrm{MCD}(ac, bc) = |c| \,\mathrm{MCD}(a, b)$.

7. Siano $a, b \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che se $\mathrm{MCD}(a, 4) = \mathrm{MCD}(b, 4) = 2$, allora $\mathrm{MCD}(a + b, 4) = 4$.

8. Siano $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tre interi tali che $\mathrm{MCD}(a, b) = \mathrm{MCD}(a, c)$. Mostrare che $\mathrm{MCD}(a, b) = \mathrm{MCD}(a, b, c)$.

9. Determinare la tavola di addizione e moltiplicazione di $\mathbb{Z}_9$. Elencare gli elementi del gruppo moltiplicativo $\mathbb{Z}_9^*$ calcolandone l'ordine: stabilire se il gruppo moltiplicativo $\mathbb{Z}_9^*$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_6$, a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, a D_3, o a A_3.

10. Determinare la tavola di addizione e moltiplicazione di $\mathbb{Z}_8$. Elencare gli elementi del gruppo moltiplicativo $\mathbb{Z}_8^*$ calcolandone l'ordine: stabilire se il gruppo moltiplicativo $\mathbb{Z}_8^*$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_4$ e/o a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

11. Siano dati $G = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_5$ e $H = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{10}$.
    (a) Esiste un isomorfismo dei gruppi additivi G e H?
    (b) Esiste un isomorfismo dei gruppi moltiplicativi G^* e H^*?

12. Siano dati $G = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$ e $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$.

    (a) Esiste un isomorfismo dei gruppi additivi G e H?

    (b) Esiste un isomorfismo dei gruppi moltiplicativi G^* e H^*?

13. Determinare i gruppi di automorfismi $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_4)$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_5)$.

N.B. Ricordate che in generale il metodo per risolvere un esercizio non è unico. Se qualche cosa non vi è chiara, e/o se pensate di aver trovato un errore di stampa, fatemi sapere!