

Istituzioni di Algebra e Geometria — Algebra, a.a. 2025-2026
Esercizi, foglio 6

1. Sia A un anello, X un insieme non vuoto. Se $\varphi, \psi \in A^X$, definiamo come sempre:

$$\begin{aligned}\varphi + \psi: X &\rightarrow A \\ x &\mapsto \varphi(x) + \psi(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi\psi: X &\rightarrow A \\ x &\mapsto \varphi(x)\psi(x).\end{aligned}$$

- (a) Verificare che A^X con tali operazioni è un anello.
 - (b) Dimostrare che A^X è commutativo se e solo se A è commutativo.
 - (c) Dimostrare che A^X è unitario se e solo se A è unitario.
2. Sia A un anello con $1_A \neq 0_A$, X un insieme non vuoto.
- (a) Determinare gli elementi invertibili dell'anello A^X definito nell'esercizio precedente.
 - (b) È vero o falso che A^X è un corpo se e solo se A è un corpo?
 - (c) È vero o falso che A^X contiene sempre divisori di zero (non nulli)?
3. Sia A un anello con $1_A \neq 0_A$.
- (a) Sia $a \in A$: è vero o falso che se $ab = b$ per ogni $b \in A$ allora $a = 1_A$?
 - (b) Sia $a \in A$ invertibile: dimostrare che il suo inverso moltiplicativo, se esiste, è unico.
4. Sia $\mathbb{R}^{2,2}$ l'insieme delle matrici quadrate d'ordine 2 a coefficienti in \mathbb{R} . Stabilire quale dei seguenti insiemi ne è un sottoanello, un sottoanello unitario, un sottoanello commutativo, un sottogruppo additivo ma non un sottoanello.
- (a) $L = \{(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid a_{12} = 0\}$.
 - (b) $A = \{(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid a_{11} = a_{22} = 0\}$.
 - (c) $B = \{(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid a_{11} = a_{22} = a_{21} = 0\}$.
 - (d) $C = \{(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid a_{12} = a_{22} = a_{21} = 0\}$.
5. Sia A un anello. Dimostrare che il *centro* di A :

$$Z(A) = \{a \in A \mid ab = ba \text{ per ogni } b \in A\}$$

è un sottoanello di A .

6. Sia A un anello con $1_A \neq 0_A$, X un insieme non vuoto. Per ogni $x \in X$ fissato siano

$$I_x = \{\varphi \in A^X \mid \varphi(x) = 0_A\}, \quad J_x = \{\varphi \in A^X \mid \varphi(x) = 1_A\}.$$

- (a) Dimostrare che I_x è un ideale proprio in A^X .
- (b) Stabilire se J_x è un ideale.
- (c) Siano $x', x'' \in X$, $x' \neq x''$: dimostrare che $I_{x'} + I_{x''}$ contiene l'unità di A^X .

7. Sia G un gruppo abeliano. Se $\varphi, \psi \in \text{End}(G)$ si definisca l'applicazione somma $\varphi + \psi: G \rightarrow G$ tale che $g \mapsto \varphi(g) + \psi(g)$. Si ponga poi $\varphi\psi = \varphi \circ \psi$.

- (a) Dimostrare che l'insieme $\text{End}(G)$ con queste due operazioni è un anello unitario.
- (b) È vero o falso che $\text{End}(G)$ è commutativo?
- (c) Verificare che l'insieme

$$I = \{\varphi \in \text{End}(G) \mid \text{se } g \text{ ha ordine finito allora } \varphi(g) = 0_G\}$$

è un ideale (bilatero) di $\text{End}(G)$.

8. Sia A un anello con $0_A \neq 1_A$. Si supponga che l'applicazione $\varphi: A \rightarrow A$ definita da $\varphi(a) = a^2$ sia un omomorfismo di anelli.

- (a) Dimostrare che A è un anello commutativo di caratteristica 2.
- (b) Verificare che se $a \in \text{Ker}(\varphi)$ allora $1_A + a$ è invertibile.
- (c) Dare un esempio di un anello A in cui l'applicazione φ sopra sia un omomorfismo.

9. Sia A un anello con $0_A \neq 1_A$ tale che $a^3 = a$ per ogni $a \in A$.

- (a) Calcolare $(2a)^3$.
- (b) Verificare che $6a = 0_A$, per ogni $a \in A$: dedurre che la caratteristica di A è 2, 3 o 6.
- (c) Dare esempi di anelli A con la proprietà sopra indicata e di caratteristica 2, 3 e 6.

10. Sia A un anello commutativo con unità e I un suo ideale. Il *radicale* di I è

$$\sqrt{I} = \{a \in A \mid \text{esiste } n \in \mathbb{N} \text{ tale che } a^n \in I\}.$$

- (a) Verificare che $I \subseteq \sqrt{I}$.
- (b) Dimostrare che se $a \in \sqrt{I}$ allora esiste $N \in \mathbb{Z}$ tale che $a^m \in I$ per ogni $m \geq N$.
- (c) Verificare che se $a, b \in \sqrt{I}$ allora anche $-a$ e $a + b$ sono in \sqrt{I} .
- (d) Dedurre che \sqrt{I} è un ideale.

11. Siano A e B due anelli unitari. Per ogni coppia $(a, b), (a', b') \in A \times B$ poniamo:

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'), \quad (a, b) \cdot (a', b') = (aa', bb').$$

- (a) Dimostrare che $A \times B$ con tali operazioni è un anello.
- (b) Verificare che $A \times B$ è commutativo se e solo se sia A che B lo sono.
- (c) Consideriamo le applicazioni

$$i_A: A \rightarrow A \times B$$

$$a \mapsto (a, 0),$$

$$p_A: A \times B \rightarrow A$$

$$(a, b) \mapsto a.$$

Definiamo poi in maniera simile $i_B: B \rightarrow A \times B$ e $p_B: A \times B \rightarrow B$.

Stabilire quali fra i_A, i_B, p_A, p_B sono omomorfismi d'anelli.

- (d) Verificare che $\text{Im}(i_A)$ e $\text{Im}(i_B)$ sono ideali di $A \times B$, generati rispettivamente da $(1_A, 0)$ e $(0, 1_B)$.

N.B. Ricordate che in generale il metodo per risolvere un esercizio non è unico. Se qualche cosa non vi è chiara, e/o se pensate di aver trovato un errore di stampa, fatemi sapere!